Coalgebren und Funktoren

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & B \arrow[d, "\alpha_B"] \\
FA \arrow[r, "F\varphi"'] & FB
\end{tikzcd}
$$

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

dem Fachbereich Mathematik und Informatik der
Philipps-Universität Marburg vorgelegt von

Tobias Schröder

aus Kassel

Marburg/Lahn 2001

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg
als Dissertation am 13. Juni 2001 angenommen.

Erstgutachter: Prof. Dr. H.P. Gumm
Zweitgutachter: Prof. Dr. J. Adámek
Tag der mündlichen Prüfung: 22. Juni 2001

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Übersicht über die Arbeit

Die Theorie der Coalgebra ist eine allgemeine Theorie *zustandsbasierter Systeme*. Automaten, Transitionssysteme, Klassen in objektorientierten Programmiersprachen, topologische Räume und viele andere in der Informatik vorkommende Systeme lassen sich mit coalgebraischen Mitteln einheitlich beschreiben und untersuchen. Jede Coalgebra hat einen *Typ*, gegeben durch einen Endofunktor F der Kategorie **Set** der Mengen. Die Fragestellung, die diese Arbeit untersucht, ist:

Welche Zusammenhänge gibt es zwischen den Eigenschaften
des Typfunktors F und den Eigenschaften seiner Coalgebren?

Jan Rutten betrachtet in seiner grundlegenden Arbeit [**Rut00b**] nur Typfunktoren, die *schwache Pullbacks erhalten*. Die gleiche Voraussetzung wird in vielen anderen Artikeln gemacht, die sich mit Coalgebra beschäftigen. Allerdings bleibt dort unklar, ob diese Voraussetzung essentiell ist. Larry Moss schreibt in [**Mos99**] zum Erhalten schwacher Pullbacks:

> Although this property is the key to a number of results in the theory, it is not so easy to motivate on the basis of first principles. That is, we do not know an a priori reason why someone would want to consider the property of preserving weak pullbacks except to say that it applies widely and has many consequences.

Eine der wichtigsten Begriffe der Coalgebra ist der der *Bisimulation*. Die intendierte Semantik ist: Eine Bisimulation setzt Zustände in Relation, die durch Beobachtungen nicht unterschieden werden können. In Kapitel 4 werden wir sehen, daß das Erhalten von schwachen Pullbacks durch den Typfunktor F dazu äquivalent ist, daß das Relationenprodukt von F-Bisimulationen immer eine F-Bisimiulation ist. Allgemeiner werden wir in diesem Kapitel beweisen, daß ein Typfunktor einen Limes genau dann schwach erhält, wenn bestimmte Relationen zwischen seinen Coalgebren (verallgemeinerte) Bisimulationen sind.

Unter den Coalgebren eines Funktors F spielt die *terminale Coalgebra* eine besondere Rolle. Sie enthält - intuitiv gesprochen - jedes "Verhalten", das eine Coalgebra vom Typ F zeigen kann, genau einmal. Unter der Voraussetzung, daß der Typfunktor F *beschränkt* ist, d.h., daß die entsprechende Kategorie von Coalgebren eine Menge von Generatoren besitzt, ist die Existenz einer terminalen Coalgebra vom Typ F sichergestellt. Kapitel 5 untersucht u.a., unter welchen Voraussetzungen F beschränkt ist und wie sich die terminale Coalgebra konstruieren und approximieren läßt.

Zuvor wird in Kapitel 2 gezeigt, wie sich einige Typen von zustandsbasierten Systemen als Coalgebren auffassen lassen, und in Kapitel 3 wird die Strukturtheorie von Coalgebren soweit entwickelt, wie dies ohne Voraussetzungen an den Typfunktor möglich ist.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind zu einen großen Teil in [**GS01a, GS01d, GS00, GS01c, GHS01**] erschienen.

Für die verwendete Kategorientheorie sei auf die Lehrbücher von Borceux ([**Bor94a**]), von Herrlich und Strecker ([**HS73**]) sowie die Neubearbeitung dieses

Buchs von den beiden Autoren und Adámek ([**AHS90**]), von Mac Lane ([**Lan71**]) sowie von Ehrig et al. ([**E$^+$72**]) verwiesen. Die verwendete Mengenlehre spielt in dieser Arbeit keine besondere Rolle, die Begrifflichkeit orientiert sich an der Bernay-Morse'schen Mengenlehre (man vgl. z.B. das Lehrbuch der Modelltheorie von Chang und Keisler: [**CK73**], Anhang A).

KAPITEL 2

Coalgebra, eine Theorie zustandsbasierter Systeme

Viele Objekte, die in der Informatik vorkommen, lassen sich als *zustandsbasierte Systeme* auffassen. Ein zustandsbasiertes System ist per Definition ein System, das einen Input empfangen kann und in Abhängigkeit von diesem Input und seinem *inneren Zustand* einen Output generiert und seinen inneren Zustand wechselt. Ein Beobachter eines solchen Systems hat keinen Zugriff auf den inneren Zustand, sondern er kann nur beobachten, wie das System auf Inputs reagiert.

Coalgebren sind eine mathematische Formalisierung zustandsbasierter Systeme. Die wachsende Popularität der Theorie der Coalgebra in den letzten Jahren erklärt sich daraus, daß sich viele Objekte, die in der Informatik auftreten, als Coalgebren auffassen und einheitlich behandeln lassen. Dazu gehören

- viele Typen von Automaten,
- nicht-deterministische Transitionssysteme,
- topologische Räume,
- Klassen in objektorientierten Sprachen.

Hat man bewiesen, daß sich eine Klasse $\mathcal{K}$ von Objekten als Klasse von Coalgebren interpretieren läßt, kann man die mittlerweile weit ausgearbeitete Theorie der Coalgebra verwenden, um diese Objekte zu untersuchen, und man erhält nützliche abgeleitete Begriffe, z.B. den Begriff eines *Homomorphismus* zwischen Objekten aus $\mathcal{K}$, den Begriff der *Unterstruktur* eines Objekts aus $\mathcal{K}$ oder den der *Bisimilarität* zweier Objekte aus $\mathcal{K}$. Es zeigt sich außerdem, daß selbst bei Objekten, für die schon weitreichende Resultate existieren, wie z.B. Automaten oder Transitionssysteme, die Interpretation als Coalgebra für einige "klassische" Resultate elegante Beweise liefert und Zusammenhänge zwischen den einzelnen Theorien klarer macht.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, anhand konkreter Beispiele die Theorie, die im Rest der Arbeit entwickelt wird, zu motivieren, und ihre Anwendbarkeit zu demonstrieren. Es ist mathematisch unabhängig von den folgenden, d.h., die in den folgenden Kapiteln entwickelte Theorie greift nicht auf Ergebnisse dieses Kapitels zurück.

Inhaltsangabe

1. Beispiele für zustandsbasierte Systeme

Automaten und Transitionssysteme gehören zu den wichtigsten Beispielen für Coalgebren. In diesem Abschnitt führen wir diese Beispiele ein, im nächsten zeigen wir, wie sie sich als Coalgebren modellieren lassen. Dort werden wir auch sehen, daß man topologische Räume ebenfalls als Coalgebren auffassen kann.

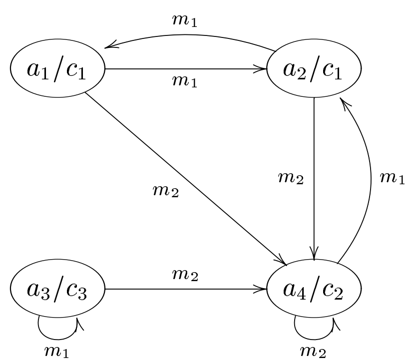
Genauso wichtig wie Objekte (also Automaten oder Transitionssysteme) sind *Homomorphismen* zwischen diesen Objekten, also *strukturerhaltende Abbildungen*. Wir werden sehen, daß in einigen Beispielen mehrere Homomorphismenbegriffe zur Auswahl stehen.

1.1. Moore-Automaten. Ein *Moore-Automat* mit Eingabealphabet M und Ausgabealphabet C ist ein Tripel (A, o_A, δ_A), bestehend aus

- einer *Zustandsmenge* A,
- einer *Ausgabe-Abbildung* $o_A : A \to C$, wobei $o_A(a) = c$ bedeutet: Wenn sich der Automat im Zustand a befindet, gibt er das Zeichen c aus;
- einer *Übergangs-Abbildung* $\delta_A : A \times M \to A$, wobei $\delta_A(a, m) = a'$ bedeutet: Wenn sich der Automat im Zustand a befindet und das Eingabezeichen m erhält, bewegt er sich in den Zustand a'.

Für Automaten gibt es eine weit ausgearbeitete algebraische Theorie (s. z.B. Eilenberg [**Eil74**]), aber es hat sich in den letzten Jahren herausgestellt, daß auch eine coalgebraische Automatentheorie erhellend ist (s. z.B. Jan Ruttens Artikel [**Rut98a, Rut00a**]).

Moore-Automaten lassen sich gut graphisch darstellen. Das folgende Diagramm zeigt einen Moore-Automaten mit vier Zuständen $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, Eingabealphabet $M = \{m_1, m_2\}$ und Ausgabealphabet $C = \{c_1, c_2, c_3\}$.



Dabei bedeutet $a \overset{m}{\to} a'$, daß $\delta_A(a, m) = a'$ gilt. In den Kreisen sind die Zustände und die zugehörigen Ausgaben angegeben. Wenn wir die Zustandsmenge A explizit angeben wollen, schreiben wir $a \overset{m}{\to}_A a'$. Wir verzichten der Einfachheit halber zunächst darauf, Start- oder Endzustände zu spezifizieren.

Sind (A, o_A, δ_A) und (B, o_B, δ_B) zwei Moore-Automaten über denselben Eingabe- und Ausgabemengen M und C, so ist ein Homomorphismus zwischen (A, o_A, δ_A) und (B, o_B, δ_B) per Definition (s. z.B. Eilenberg [**Eil74**]) eine Abbildung $\varphi : A \to B$, die folgende Eigenschaften hat:

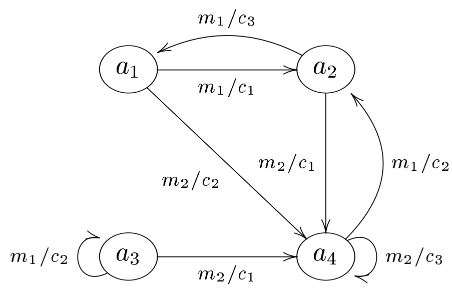
- Für jedes $a \in A$ gilt $o_A(a) = o_B(\varphi a)$.
- Für jedes $a \in A$ und jedes $m \in M$ gilt $\varphi(\delta_A(a, m)) = \delta_B(\varphi a, m)$, d.h., für alle $a, a' \in A$ und jedes $m \in M$ gilt:

$$a \overset{m}{\to}_A a' \Rightarrow \varphi a \overset{m}{\to}_B \varphi a'.$$

Homomorphismen sind also Abbildungen, die Zustandsübergänge und Ausgaben erhalten. Da es für jeden Zustand und jede Eingabe nur einen Nachfolgezustand gibt, *reflektiert* jeder Homomorphismus $\varphi : (A, o_A, \delta_A) \to (B, o_B, \delta_B)$ auch Zustandsübergänge, d.h.: Wenn $\varphi(a) \overset{m}{\to} b'$ für ein $a \in A$, ein $m \in M$ und ein $b' \in B$ gilt, dann gilt auch $\varphi(a') = b'$ für das eindeutige Element $a' \in A$, das $a \overset{m}{\to} a'$ erfüllt.

1.2. Mealy-Automaten. Ein *Mealy-Automat* mit Eingabealphabet M und Ausgabealphabet C unterscheidet sich von einem Moore-Automaten darin, daß die Ausgabefunktion nicht nur vom Zustand abhängt, sondern auch von der Eingabe. Das heißt, ein Mealy-Automat ist ein Tripel $(A, o_A : A \times M \to C, \delta_A : A \times M \to A)$.

Auch Mealy-Automaten lassen sich gut visualisieren. Das folgende Diagramm zeigt einen Mealy-Automaten mit vier Zuständen $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, Eingabealphabet $M = \{m_1, m_2\}$ und Ausgabealphabet $C = \{c_1, c_2, c_3\}$.



Dabei bedeutet $a \overset{m/c}{\to} a'$, daß $o_A(a, m) = c$ und $\delta_A(a, m) = a'$ gilt.

Ein Homomorphismus zwischen zwei Mealy-Automaten (A, o_A, δ_A) und (B, o_B, δ_B) über denselben Eingabe- und Ausgabemengen M und C ist eine Abbildung $\varphi : A \to B$, die für alle $a, a' \in A$, alle $c \in C$ und alle $m \in M$ folgende Bedingung erfüllt (s. z.B. [**Eil74**]):

$$a \overset{m/c}{\to}_A a' \Rightarrow \varphi a \overset{m/c}{\to}_B \varphi a'.$$

Homomorphismen sind also wie im Falle von Moore-Automaten Abbildungen, die Zustandsübergänge und Ausgaben erhalten. Wie bei Moore-Automaten folgt, daß jeder Homomorphismus Zustandsübergänge reflektiert.

1.3. Automaten mit Start- und Endzuständen. Häufig spezifiziert man für einen Moore- oder Mealy-Automaten (A, o_A, δ_A) mit Eingabealphabet M und Ausgabealphabet C noch eine Menge $I_A \subseteq A$ von Startzuständen und eine Menge $T_A \subseteq A$ von Endzuständen. Ein Moore-Automat mit Start- und Endzuständen wäre also ein 5-tupel $\mathcal{A} = (A, o_A, \delta_A, I_A, T_A)$.

Ist $\mathcal{B} = (B, o_A, \delta_B, I_B, T_B)$ ein weiterer Moore-Automat mit Start- und Endzuständen über denselben Eingabe- und Ausgabealphabeten, so wollen wir definieren, wann eine Abbildung $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sein soll. Zunächst verlangen wir, daß φ ein Homomorphismus zwischen den zugrundeliegenden Moore-Automaten (A, o_A, δ_A) und (B, o_B, δ_B) ist. Weiterhin soll φ mit Start- und Endzuständen "kompatibel" sein. Was soll das bedeuten? Zumindest zwei Definitionen sind denkbar:

- Wir könnten verlangen, daß φ Start- und Endzustände erhält, d.h., daß $\varphi(a)$ ein Startzustand (bzw. Endzustand) von $\mathcal{B}$ ist, wenn a ein Startzustand (bzw. Endzustand) von $\mathcal{A}$ ist.
- Oder wir könnten zusätzlich verlangen, daß φ Start- und Endzustände reflektiert, d.h., wir könnten fordern, daß $a \in A$ genau dann ein Startzustand (bzw. Endzustand) von $\mathcal{A}$ ist, wenn $\varphi(a)$ ein Startzustand (bzw. Endzustand) von $\mathcal{B}$ ist.

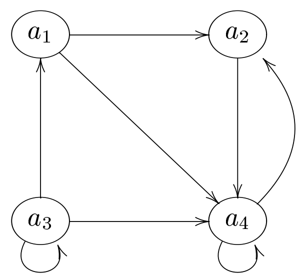
Es ist auf den ersten Blick nicht klar, welche dieser Definitionen die "richtige" ist. Wenn wir Automaten als Coalgebren modellieren, erhalten wir gleichzeitig einen

Homomorphismusbegriff, und wir werden sehen, daß er mit der zweiten Definition übereinstimmt. Allgemeiner liefert die Modellierung einer Klasse von Objekten als Coalgebren immer einen Homomorphismusbegriff mit. Das kann man als Stärke oder als Schwäche ansehen:

- Als Stärke, weil man mit den so definierten Homomorphismen automatisch eine weitreichende Theorie erhält;
- als Schwäche, weil man in manchen Beispielen - wie wir im Falle topologischer Räume sehen werden - vielleicht einen anderen Homomorphiebegriff für angemessener hielte.

1.4. Transitionssysteme. Transitionssysteme waren eines der frühesten Beispiele für Coalgebren (s. z.B. Ruttens Arbeiten [**Rut95, Rut00b**]). Ein Transitionssystem über einer Zustandsmenge A ist lediglich eine Relation $R_A \subseteq A \times A$. Gilt für zwei Elemente $a, a' \in A$, daß $(a, a') \in R_A$ ist, so schreibt man auch $a \to_A a'$ und sagt, daß a' ein *Nachfolger* von a ist. Meistens werden wir den Index $_A$ weglassen und nur $a \to a'$ schreiben.

Auch Transitionssysteme werden häufig graphisch dargestellt, wie schon die Notation $a \to a'$ suggeriert. Das folgende Diagramm zeigt ein Transitionssystem mit vier Zuständen a_1, a_2, a_3, a_4.



Was ist ein Homomorphismus von Transitionssystemen? Sind (A, R_A) und (B, R_B) zwei Transitionssysteme und $\varphi : A \to B$ eine Abbildung, so haben wir mindestens zwei Möglichkeiten, zu definieren, wann wir φ als Homomorphismus auffassen wollen:

- Wir könnten verlangen, daß φ Transitionen erhält, daß also aus $a \to a'$ immer $\varphi(a) \to \varphi(a')$ folgt.
- Oder wir könnten zusätzlich verlangen, daß φ auch Transitionen reflektiert, d.h., daß aus $\varphi(a) \to b'$ für $a \in A$ und $b' \in B$ immer folgt, daß ein $a' \in A$ existiert, das $a \to a'$ und $\varphi(a') = b'$ erfüllt.

In der Theorie der Transitionssysteme (s. z.B. [**B**$^+$**00**] von Blackburn et al.) nennt man Abbildungen, die die erste Bedingung erfüllen, Homomorphismen, Abbildungen, die auch die zweite Bedingung erfüllen, *beschränkte* Homomorphismen. Wenn wir unten Transitionssysteme als Coalgebren modellieren, werden wir sehen, daß Coalgebrenhomomorphismen den beschränkten Homomorphismen entsprechen. Daher reden wir ab jetzt nur noch von Homomorphismen und meinen damit beschränkte Homomorphismen.

1.5. Transitionssysteme mit mehreren Relationen. Es ist ohne weiteres möglich, auch Transitionssysteme mit mehreren Transitionsrelationen zu betrachten. Dazu geben wir eine Indexmenge M vor und betrachten Mengen A mit Familien $(R_{A,m})_{m \in M}$ von Relationen auf A. Ist $(B, (R_{B,m})_{m \in M})$ ein weiteres solches Transitionssystem, dann ist ein Homomorphismus zwischen $(A, (R_{A,m})_{m \in M})$ und $(B, (R_{B,m})_{m \in M})$ eine Abbildung $\varphi : A \to B$, die für jedes $m \in M$ ein Homomorphismus vom Transitionsystem $(A, R_{A,m})$ ins Transitionssystem $(B, R_{B,m})$ ist.

1.6. Kripke-Strukturen. Eine *Kripke-Struktur (über Φ)* ist ein Transitionssystem (A, R_A) zusammen mit einer *Valuation* $\mathrm{prop}_A : A \to \mathcal{P}(\Phi)$, wobei Φ eine Menge von *atomaren Aussagen* ist. Die Interpretation ist, daß prop_A jedem Element $a \in A$ die Menge der atomaren Aussagen aus Φ zuordnet, die in a gelten. Ist $(B, \mathrm{prop}_B, R_B)$ eine weitere Kripke-Struktur, so ist $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus von Kripke-Strukturen, wenn φ ein Homomorphismus der zugrundeliegenden Transitionssysteme (A, R_A) und (B, R_B) ist und $\mathrm{prop}_B(\varphi(a)) = \mathrm{prop}_A(a)$ für jedes $a \in A$ gilt.

2. Zustandsbasierte Systeme als Coalgebren

Wir werden in diesem Abschnitt den Begriff des zustandbasierten Systems durch den Begriff der Coalgebra formalisieren und zeigen, wie sich die im vorigen Abschnitt eingeführten Beispiele als Coalgebren auffassen lassen. Außerdem werden wir sehen, daß sich auch topologische Räume als Coalgebren modellieren lassen.

2.1. Coalgebren. Eine *Coalgebra* ist durch drei Bestimmungsstücke gegeben:
- eine Menge A, die *Zustandsmenge*;
- eine Abbildung $\alpha_A : A \to FA$, die *Coalgebrenstruktur* oder *Transitionsabbildung* oder *Strukturabbildung*, die jedem Zustand $a \in A$ die Information zuordnet, wie die Coalgebra "auf Eingaben reagiert", wenn sie sich im Zustand a befindet, wobei
- $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ ein $\mathbf{Set}$-Endofunktor ist, der *Typfunktor*, der bestimmt, welche Arten von Eingaben die Coalgebra annehmen und welche Ausgaben sie produzieren kann.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\alpha_A"'] \\ FA \end{tikzcd}$$

Wir bezeichnen das Paar (A, α_A) immer mit $\mathcal{A}$. Soll der Typ F der Coalgebra $\mathcal{A}$ betont werden, so reden wir von einer *F-Coalgebra*.

Um definieren zu können, was ein Coalgebren-Homomorphismus ist, benötigen wir, daß wir F auch auf Abbildungen anwenden können. Sind $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ und $\mathcal{B} = (B, \alpha_B)$ zwei Coalgebren eines Funktors F, so nennen wir eine Abbildung $\varphi : A \to B$ zwischen den Zustandsmengen einen *(F-Coalgebren)-Homomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$*, wenn φ mit den Coalgebrenstrukturen verträglich ist, d.h., wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & B \arrow[d, "\alpha_B"] \\ FA \arrow[r, "F\varphi"'] & FB \end{tikzcd}$$

kommutiert. Daß F ein Funktor ist, impliziert sofort, daß die Identität auf jeder Coalgebra ein Homomorphismus ist und daß die Komposition zweier Homomorphismen wieder ein Homomorphismus ist. Zum Beweis muß man nur bemerken, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & A \arrow[d, "\alpha_A"] \\ FA \arrow[r, "F(\mathrm{id}_A)"'] & FA \end{tikzcd}$$

kommutiert, da $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ gilt, und im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "\alpha_A"'] \arrow[rr, bend left, "\psi\circ\varphi"] & B \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, "\alpha_B"'] & C \arrow[d, "\alpha_C"] \\
FA \arrow[r, "F\varphi"] \arrow[rr, bend right, "F(\psi\circ\varphi)"'] & FB \arrow[r, "F\psi"] & FC
\end{tikzcd}$$

aus der Kommutativität der beiden inneren Quadrate die Kommutativität des gesamten Diagramms folgt, da $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ gilt. Folglich bilden die F-Coalgebren zusammen mit den F-Homomorphismen eine Kategorie, die wir $\mathbf{Set}_F$ nennen.

Wir zeigen jetzt, wie sich die im letzten Abschnitt betrachteten Beispiele und ihre Homomorphismen coalgebraisch modellieren lassen.

2.2. Moore-Automaten. Wir behaupten, daß die Moore-Automaten mit Eingabemenge M und Ausgabemenge C gerade die Coalgebren des Funktors

$$F := C \times (-)^M$$

sind. F ist auf einer Menge A definiert als

$$FA := C \times A^M,$$

wobei für zwei Mengen X und Y die Menge X^Y per Definition die Menge der Funktionen von Y in X ist. Für eine Abbildung $f : A \to B$ ist $Ff : C \times A^M \to C \times B^M$ definiert als die Abbildung, die jedem Paar $(c \in C, h : M \to A)$ das Paar $(c, f \circ h : M \to B)$ zuordnet, d.h.

$$Ff = \mathrm{id}_C \times f^M.$$

Man überprüft leicht, daß das so definierte F in der Tat ein Funktor ist.

Um Moore-Automaten als F-Coalgebren auffassen zu können, nutzen wir aus, daß es für je drei Mengen X, Y, Z eine Bijektion $Z^{X\times Y} \simeq (Z^Y)^X$ gibt, gegeben durch

$$(f : X \times Y \to Z) \mapsto (f' : X \to Z^Y), f'(x)(y) := f(x, y).$$

Weiterhin ist die Abbildung

$$X^Z \times Y^Z \to (X \times Y)^Z, (f : Z \to X, g : Z \to Y) \mapsto (f, g) := \lambda z.(fz, gz)$$

bijektiv. Daraus folgt insbesondere für alle Mengen A, C und M:

$$\begin{aligned}
&\{(A, \delta_A, o_A) \mid o_A : A \to C, \delta_A : A \times M \to A\} \\
&= (C^A) \times (A^{A\times M}) \\
&\simeq C^A \times (A^M)^A \\
&\simeq (C \times A^M)^A \\
&= (FA)^A = \{\alpha_A \mid \alpha_A : A \to FA\}.
\end{aligned}$$

Also haben wir eine Bijektion zwischen den Moore-Automaten mit Grundmenge A und den F-Coalgebren mit Grundmenge A.

Etwas präziser: Gehen wir von einem Moore-Automaten $(A, o_A : A \to C, \delta_A : A \times M \to A)$ aus, so können wir zunächst zu $(A, o_A : A \to C, \delta'_A : A \to A^M)$ übergehen. Daraus erhalten wir eine F-Coalgebra $(A, \alpha_A : A \to C \times A^M)$, indem wir $\alpha_A(a) := (o_A(a), \delta'_A(a))$ definieren. Ist umgekehrt eine F-Coalgebra (A, α_A) gegeben, so ist α_A eine Abbildung in das Produkt $C \times A^M$, induziert also zwei

Komponentenabbildung $o_A : A \to C$ und $\delta'_A : A \to A^M$ und damit einen Moore-Automaten (A, o_A, δ_A). Diese beiden Übergänge sind offensichtlich invers zueinander.

Sind (A, o_A, δ_A) und (B, o_B, δ_B) zwei Moore-Automaten über denselben Eingabe- und Ausgabemengen M und C, $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ und $\mathcal{B} = (B, \alpha_B)$ die zugehörigen Coalgebren des Funktors $F = C \times (-)^M$, so ist ein Coalgebren-Homomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ eine Abbildung $\varphi : A \to B$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & B \arrow[d, "\alpha_B"] \\ C \times A^M \arrow[r, "\mathrm{id}_C \times f^M"'] & C \times B^M \end{tikzcd}$$

kommutiert. Per Definition gilt

- $\alpha_A = (o_A, \delta'_A)$ sowie
- $\delta'_A(a)(m) = \delta_A(a, m)$ für alle $a \in A$ und $m \in M$,

und analoge Gleichungen gelten für α_B. Damit ist die Kommutativität dieses Diagramms äquivalent zur Kommutativität der beiden folgenden Diagramme:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "o_A"'] & B \arrow[d, "o_B"] \\ & C \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta'_A"'] & B \arrow[d, "\delta'_B"] \\ A^M \arrow[r, "\varphi^M"'] & B^M \end{tikzcd}$$

Die Kommutativität des linken Diagramms bedeutet, daß $o_A(a) = o_B(\varphi a)$ für alle $a \in A$ gilt, daß also $\mathcal{B}$ im Zustand φa die gleiche Ausgabe wie $\mathcal{A}$ im Zustand a produziert. Die Kommutativität des zweiten Diagramms bedeutet, daß $\varphi(\delta_A(a, m)) = \delta_B(\varphi a, m)$ für alle $a \in A$ und alle $m \in M$ gilt. Das ist äquivalent zu folgender Bedingung:

$$\forall a, a' \in A. \forall m \in M. \left(a \xrightarrow{m}_A a' \Rightarrow \varphi a \xrightarrow{m}_B \varphi a' \right).$$

Das zeigt, daß eine Abbildung genau dann ein F-Coalgebren-Homomorphismus ist, wenn sie ein Automaten-Homomorphismus ist.

2.3. Mealy-Automaten. Auch Mealy-Automaten mit Eingabemenge M und Ausgabemenge C lassen sich als Coalgebren eines Funktors F auffassen. F ist auf einer Menge A definiert als

$$FA := C^M \times A^M,$$

auf einer Abbildung $f : A \to B$ als

$$Ff := \mathrm{id}_{C^M} \times f^M.$$

Dann korrespondieren F-Coalgebren (A, α_A) und Mealy-Automaten (A, o_A, δ_A) bijektiv über die Gleichung

$$\alpha_A a = (\lambda m.o_A(a, m), \lambda m.\delta_A(a, m)).$$

Man rechnet wie im Fall von Moore-Automaten nach, daß der coalgebraische Homomorphismusbegriff mit dem in Abschnitt 1.2 definierten übereinstimmt.

2.4. Automaten mit Start- und Endzuständen. Sei $(A, o_A, \delta_A, I_A, T_A)$ ein Moore-Automat mit Eingabemenge M und Ausgabemenge C, für den zusätzlich eine Menge I_A von Startzuständen und eine Menge T_A von Endzuständen definiert ist. Die zusätzliche Information läßt sich coalgebraisch modellieren, indem man diesen Automaten als Coalgebra des Funktors

$$F = C \times (-)^M \times 2 \times 2$$

betrachtet, wobei $2 = \{0,1\}$ eine zweielementige Menge ist. Die zum Automaten $(A, o_A, \delta_A, I_A, T_A)$ gehörende F-Coalgebrenstruktur α_A ist gegeben durch

$$a \mapsto (o_A(a), \lambda m.\delta_A(a,m), i_A(a), t_A(a)),$$

wobei

$$i_A(a) := \begin{cases} 1 & \text{für } a \in I_A \\ 0 & \text{für } a \notin I_A \end{cases} \qquad t_A(a) := \begin{cases} 1 & \text{für } a \in T_A \\ 0 & \text{für } a \notin T_A, \end{cases}$$

definiert ist. Anders gesagt: i_A ist die charakteristische Funktion von I_A, t_A die charakteristische Funktion von T_A. Wir nutzen also aus, daß die Abbildung von der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ von A in die Menge 2^A, die jeder Teilmenge U von A die charakteristische Funktion von U zuordnet, bijektiv ist.

Ist $(B, o_B, \delta_B, I_B, T_B)$ ein weiterer Moore-Automat mit Eingabemenge M und Ausgabemenge C sowie Startzuständen I_B und Endzuständen T_B, so ist eine Abbildung $\varphi : A \to B$ ein F-Homomorphismus zwischen den zugehörigen F-Coalgebren, wenn φ ein Homomorphismus zwischen den Moore-Automaten (A, o_A, δ_A) und (B, o_B, δ_B) ist, der zusätzlich Anfangs- und Endzustände erhält und reflektiert.

Mealy-Automaten mit Start- und Endzuständen lassen sich auf analoge Weise als Coalgebren des Funktors

$$F = C^M \times (-)^M \times 2 \times 2$$

auffassen.

2.5. Transitionssysteme. Die Relationen R auf einer Menge A korrespondieren bijektiv mit Abbildungen α_A von A in die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ von A über die Beziehung

$$a' \in \alpha_A(a) \iff aRa'.$$

Damit läßt sich jedes Transitionssystem $(A, R_A \subseteq A \times A)$ als Coalgebra des Potenzmengenfunktors $\mathcal{P}$ auffassen. $\mathcal{P}$ ordnet jeder Menge A die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ zu, jeder Abbildung $f : A \to B$ die Abbildung

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), U \mapsto f[U] := \{fu \mid u \in U\}.$$

Sind (A, R_A) und (B, R_B) zwei Transitionssysteme, $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ und $\mathcal{B} = (B, \alpha_B)$ die zugehörigen Coalgebren des Potenzmengenfunktors, so ist ein $\mathcal{P}$-Homomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ eine Abbildung $\varphi : A \to B$, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & B \arrow[d, "\alpha_B"] \\ \mathcal{P}(A) \arrow[r, "\mathcal{P}(\varphi)"'] & \mathcal{P}(B), \end{tikzcd}$$

kommutieren läßt. Das bedeutet, daß für jedes $a \in A$

$$\varphi[\alpha_A(a)] = \alpha_B(\varphi a)$$

gilt. Auf beiden Seiten stehen Teilmengen von B. Die Inklusion

$$\varphi[\alpha_A(a)] \subseteq \alpha_B(\varphi a)$$

bedeutet

$$a \to_A a' \Rightarrow \varphi(a) \to_B \varphi(a').$$

Die umgekehrte Inklusion ist dazu äquivalent, daß für jedes $b' \in B$ aus $\varphi(a) \to_B b'$ folgt, daß ein $a' \in A$ mit $a \to_A a'$ und $\varphi(a') = b'$ existiert.

Das zeigt, daß $\mathcal{P}$-Coalgebren-Homomorphismen die beschränkten Homomorphismen zwischen Transitionssystemen sind.

2.6. Transitionssysteme mit mehreren Relationen. Es ist ohne weiteres möglich, auch Transitionssysteme mit mehreren Transitionsrelationen als Coalgebren aufzufassen. Haben wir auf einer Zustandsmenge A eine Familie $(R_m)_{m\in M}$ von Transitionsrelationen, so können wir $(A, (R_m)_{m\in M})$ als Coalgebra des Funktors $\mathcal{P}(-)^M$ auffassen, indem wir für $a \in A$ und $m \in M$

$$\alpha_A(a)(m) := \{a' \in A \mid aR_m a'\}$$

setzen. Coalgebrenhomomorphismen zwischen Transitionssystemen mit mehreren Relationen sind Abbildungen, die bzgl. jeder dieser Relationen beschränkte Homomorphismen sind.

2.7. Kripke-Strukturen. Seien Φ eine Menge von atomaren Aussagen, $(A, R_A, \mathrm{prop}_A)$ eine Kripke-Struktur über Φ. Dann ist (A, R_A) ein Transitionssystem, von dem wir schon wissen, wie wir es als Coalgebra $(A, \alpha_{A,\mathcal{P}})$ des Potenzmengenfunktors $\mathcal{P}$ auffassen können. Die Abbildung $\mathrm{prop}_A : A \to \mathcal{P}(\Phi)$ hat schon die richtige Form: (A, prop_A) ist eine Coalgebra des konstanten Funktors $\mathcal{P}(\Phi)$. Durch Kombination der Strukturabbildungen $\alpha_{A,\mathcal{P}}$ und prop_A erhalten wir eine Coalgebra $(A, \alpha_A := (\mathrm{prop}_A, \alpha_{A,\mathcal{P}}) : A \to \mathcal{P}(\Phi) \times \mathcal{P}(A))$ des Funktors $\mathcal{P}(\Phi) \times \mathcal{P}$. Umgekehrt erhalten wir aus einer Coalgebra $(A, \alpha_A : A \to \mathcal{P}(\Phi) \times \mathcal{P}(A))$ durch die Betrachtung der Komponentenabbildung von α_A eine Kripke-Struktur über Φ. Zusammenfassend gesagt: Kripke-Strukturen über Φ entsprechen genau den Coalgebren des Funktors $\mathcal{P}(\Phi) \times \mathcal{P}$.

Ist $(B, R_B, \mathrm{prop}_B)$ eine weitere Kripke-Struktur über Φ, so ist ein Coalgebren-Homomorphismus zwischen den zugehörigen $\mathcal{P} \times \mathcal{P}(\Phi)$-Coalgebren eine Abbildung $\varphi : A \to B$, die ein $\mathcal{P}$-Coalgebrenhomomorphismus zwischen den Transitionssystemen (A, R_A) und (B, R_B) ist und gleichzeitig für jeden Zustand $a \in A$ die Gleichung $\mathrm{prop}_A(a) = \mathrm{prop}_B(\varphi(a))$ erfüllt.

Im nächsten Unterabschnitt betrachten wir ein neues Beispiel:

2.8. Topologische Räume. Etwas überraschend ist zunächst, daß sich auch topologische Räume als Coalgebren auffassen lassen. Ist τ eine Topologie auf einer Menge X, so können wir für jeden Punkt $x \in X$ den *Umgebungsfilter* von x betrachten, also die Menge

$$\tau_x := \{U \subseteq A \mid \exists V \in \tau.\, x \in V \subseteq U\}$$

von Teilmengen von X. Die Topologie τ ist durch die Familie $(\tau_x)_{x\in X}$ eindeutig bestimmt. Folglich können wir den topologischen Raum (X, τ) als Coalgebra des *Filterfunktors* $\mathcal{F}$ interpretieren, wie H. Peter Gumm in [**Gum01b**] nachgewiesen hat: Für eine Menge A ist $\mathcal{F}(A)$ die Menge aller Filter auf A (einschließlich des trivialen Filters $\mathcal{P}(A)$), für eine Abbildung $f : A \to B$ setzt man

$$(\mathcal{F}f)(\mathfrak{u}) := \uparrow \{f[U] \mid U \in \mathfrak{u}\},$$

wobei die rechte Seite den von den $f[U]$ erzeugten Filter meint. Definieren wir jetzt für alle $x \in X$

$$\alpha_X(x) := \tau_x \in \mathcal{F}(X),$$

so ist (X, α_X) eine Coalgebra des Filterfunktors.

In den bisher betrachteten Beispielen erhielten wir immer eine genaue Entsprechung zwischen den betrachteten Objekten und den Coalgebren eines Funktors. Dies ist in diesem Fall anders. Zwar ist die Topologie τ auf X durch die Familie $(\tau_x)_{x \in X}$ eindeutig bestimmt, wir können also die topologischen Räume als Teilklasse der $\mathcal{F}$-Coalgebren auffassen, aber sicherlich läßt sich nicht für jede Abbildung $\alpha_X : X \to \mathcal{F}(X)$ und jedes $x \in X$ der Filter $\alpha_X x$ als Umgebungsfilter von x bzgl. einer Topologie auf X auffassen. Es ist z.B. nicht gewährleistet, daß $x \in U$ für jedes $U \in \alpha_X x$ gilt.

Sind (X, τ_X) und (Y, τ_Y) topologische Räume, so ist eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ genau dann ein $\mathcal{F}$-Homomorphismus zwischen den zugeordneten Coalgebren (X, α_X) und (Y, α_Y) des Filterfunktors $\mathcal{F}$, wenn φ bzgl. der Topologien τ_X und τ_Y stetig und offen ist (s. [**Gum01b**] für einen Beweis dieser Tatsache).

Die coalgebraische Modellierung führt in diesem Beispiel also auf einen - vom Standpunkt der Topologie aus - ungewöhnlichen Homomorphismus-Begriff. Von diesem Standpunkt aus würde man eher die Kategorie der topologischen Räume mit allen stetigen Abbildungen als Homomorphismen betrachten.

3. Bisimulationen

Einer der wichtigsten Begriffe in der Theorie der Coalgebra ist der Begriff der *Bisimulation*, der aus der Theorie der Transitionssysteme stammt. Die intendierte Semantik ist: Eine Bisimulation setzt Zustände in Relation, die *(durch Beobachtungen) ununterscheidbar* sind.

3.1. Bisimulationen von Transitionssystemen. Sind (A, R_A), (B, R_B) zwei Transitionssysteme, so ist eine Relation $R \subseteq A \times B$ eine Bisimulation (s. z.B. [**B$^+$00**]), wenn für alle $(a, b) \in R$ gilt:

- Für jeden Nachfolger a' von a gibt es einen Nachfolger b' von b mit $(a', b') \in R$.
- Für jeden Nachfolger b' von b gibt es einen Nachfolger a' von a mit $(a', b') \in R$.

Dies kann man so visualisieren:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dash, bend left, "R"] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
a' \arrow[r, dash, bend right, "R"'] & b'
\end{tikzcd}$$

Zwei Zustände $a \in A$ und $b \in B$ heißen *bisimilar*, wenn eine Bisimulation zwischen (A, R_A) und (B, R_B) existiert, bzgl. derer a und b in Relation stehen. Sind (A, α_A) und (B, α_B) die zu (A, R_A) bzw. (A, R_B) gehörenden $\mathcal{P}$-Coalgebren, so sieht man leicht, daß R genau dann eine Bisimulation zwischen (A, R_A) und (B, R_B) ist, wenn es auf R eine $\mathcal{P}$-Coalgebrenstruktur $\alpha_R : R \to \mathcal{P}(R)$ gibt, bzgl. derer die mengentheoretischen Projektionen $\pi_A : R \to A$ und $\pi_B : R \to B$ beide $\mathcal{P}$-Homomorphismen zwischen (R, α_R) und (A, α_A) bzw. (B, α_B) sind.

3.2. Bisimulationen von F-Coalgebren. Mit Hilfe dieser Umformulierung läßt sich der Begriff der Bisimulation für Coalgebren eines beliebigen Funktors F definieren. Sind $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ und $\mathcal{B} = (B, \alpha_B)$ zwei F-Coalgebren, so ist eine Relation $R \subseteq A \times B$ eine Bisimulation zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, wenn es auf R eine F-Coalgebrenstruktur $\alpha_R : R \to FR$ gibt, die folgendes Diagramm kommutativ ergänzt:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\alpha_A"'] & R \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, "\alpha_R"'] & B \arrow[d, "\alpha_B"] \\
F(A) & F(R) \arrow[l, "F(\pi_A)"] \arrow[r, "F(\pi_B)"'] & F(B),
\end{tikzcd}$$

also π_A und π_B zu F-Homomorphismen macht. Man kann allgemein beweisen (s. Kapitel 3), daß für F-Coalgebren $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ gilt:

- Die leere Menge ist immer eine Bisimulation zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
- Beliebige Vereinigungen von Bisimulationen sind Bisimulationen. Insbesondere gibt es eine größte Bisimulation $\sim_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
- Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn der Graph von φ eine Bisimulation zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist.
- Ist R eine Bisimulation ***auf*** $\mathcal{A}$, d.h. zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$, die gleichzeitig eine Äquivalenzrelation ist, dann gibt es auf A/R eine eindeutige F-Coalgebrenstruktur $\alpha_{A/R}$, die die kanonische Projektion $\pi_R : A \to A/R$ zu einem F-Homomorphismus macht.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "\pi_R"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & A/R \arrow[d, dashed, "\alpha_{A/R}"] \\
FA \arrow[r, two heads, "F\pi_R"'] & F(A/R)
\end{tikzcd}$$

Wir sagen kurz: Jede ***Bisimulationsäquivalenz*** ist eine ***Kongruenz*** , d.h. der Kern eines Homomorphismus. Die Coalgebra $(A/R, \alpha_{A/R})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}/R$.

Für viele Funktoren F gilt außerdem, daß die größte Bisimulation $\sim_{\mathcal{A}} := \sim_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$ auf jeder F-Coalgebra $\mathcal{A}$ eine Äquivalenzrelation ist.

3.3. Bisimulationen von Moore-Automaten. Sind (A, o_A, δ_A) und (B, o_B, δ_B) zwei Moore-Automaten über denselben Eingabe- und Ausgabemengen M und C, $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ und $\mathcal{B} = (B, \alpha_B)$ die zugehörigen Coalgebren des Funktors $F = C \times (-)^M$, so ist eine Relation $R \subseteq A \times B$ genau dann eine Bisimulation, wenn eine Abbildung $\alpha_R : R \to C \times R^M$ existiert, die folgendes Diagramm kommutieren läßt:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "{(o_A,\delta'_A)}"'] & R \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, "\alpha_R"'] & B \arrow[d, "{(o_B,\delta'_B)}"] \\
C \times A^M & C \times R^M \arrow[l, "\mathrm{id}_C \times \pi_A^M"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C \times \pi_B^M"'] & C \times B^M
\end{tikzcd}$$

Das ist äquivalent dazu, daß zwei Abbildungen $o_R : R \to C$, $\delta'_R : R \to R^M$ existieren, die folgende Diagramme kommutieren lassen:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "o_A"'] & R \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, "o_R"] & B \arrow[dl, "o_B"] \\
& C &
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\delta'_A"'] & R \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, "\delta'_R"'] & B \arrow[d, "\delta'_B"] \\
A^M & R^M \arrow[l, "\pi_A^M"] \arrow[r, "\pi_B^M"'] & B^M
\end{tikzcd}$$

Man sieht damit leicht, daß R genau dann eine Bisimulation ist, wenn für alle $(a, b) \in R$ gilt:

(1) $o_A(a) = o_B(b)$;

(2) für jedes $m \in M$ ist auch $(\delta_A(a,m), \delta_B(b,m)) \in R$.

Jetzt betrachten wir die größte Bisimulation $\sim_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Dazu definieren wir die Funktion

$$\delta_A^* : A \times M^* \to A$$

induktiv durch

$$\delta_A^*(a, \varepsilon) = a,$$
$$\delta_A^*(a, m \cdot w) = \delta_A^*(\delta_A(a,m), w),$$

wobei M^* die Menge der endlichen Worte über dem Alphabet M ist, $\varepsilon \in M^*$ das leere Wort und $m \cdot w$ die Konkatenation des Zeichens m mit der Zeichenkette w. $\delta_A^*(a,w)$ ist für ein Wort $w = w_1 \cdots w_n$ also der Zustand, in den der Automat (A, o_A, δ_A) übergeht, wenn er im Zustand a gestartet wird und nacheinander die Eingabezeichen $w_1, \ldots, w_n$ erhält. Analog definieren wir δ_B^*.

Die induktive Anwendung der Bedingungen (1) und (2) liefert dann, daß für jedes $a \in A$ und jedes $b \in B$ gilt:

$$a \sim_{\mathcal{A},\mathcal{B}} b \iff \forall w \in M^*. o_A(\delta_A^*(a,w)) = o_B(\delta_B^*(b,w)),$$

d.h., zwei Zustände sind genau dann bisimilar, wenn sie bei gleichen Eingaben die gleichen Ausgaben produzieren. Besonders interessant ist das, wenn man diese Beobachtungen auf die größte Bisimulation $\sim_{\mathcal{A}} := \sim_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$ auf $\mathcal{A}$ anwendet. Denn dann gilt für alle $a_1, a_2 \in A$:

$$a_1 \sim_{\mathcal{A}} a_2 \iff \forall w \in M^*. o_A(\delta_A^*(a_1,w)) = o_A(\delta_A^*(a_2,w))$$

- die größte Bisimulation auf $\mathcal{A}$ ist also nichts anderes als die aus der Automatentheorie bekannte *Nerode-Kongruenz* auf $\mathcal{A}$ (s. z.B. [**HU94**] von Hopcroft und Ullman). Im nächsten Abschnitt werden wir ein allgemeines Verfahren kennenlernen, die größte Bisimulation auf einer Coalgebra zu berechnen.

4. Coerzeugung der größten Bisimulation

In der Algebra werden Kongruenzen oft *erzeugt*: man geht von einer Menge von Paaren aus und nimmt alle Paare hinzu, die man aufgrund bestimmter Kongruenzbedingungen hinzunehmen muß. Die größte Bisimulation $\sim_{\mathcal{A}}$ auf einer F-Coalgebra $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ (oder allgemeiner: die größte Bisimulation zwischen zwei Coalgebren) ist hingegen *coerzeugt*: Man geht von $A \times A$ aus und entfernt alle Paare, die man entfernen muß.

4.1. F-Coalgebren. Betrachten wir noch einmal das definierende Diagramm für eine Bisimulation auf einer F-Coalgebra $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\alpha_A"'] & R \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, dashed, "\alpha_R"'] & A \arrow[d, "\alpha_A"] \\
FA & FR \arrow[l, "F\pi_1"] \arrow[r, "F\pi_2"'] & FA
\end{tikzcd}$$

R ist genau dann eine Bisimulation, wenn es für jedes $(a_1, a_2) \in R$ ein Element $w \in FR$ gibt, das $\alpha_A a_1 = (F\pi_1)w$ und $\alpha_A a_2 = (F\pi_2)w$ erfüllt. Diese Beobachtung führt zu folgender Konstruktion von $\sim_{\mathcal{A}}$ durch Ordinalzahleninduktion. Man setzt $R_0 := A \times A$. Für jede Ordinalzahl λ definiert man

$$R_{\lambda+1} := \{(a_1, a_2) \in R_\lambda \mid \exists w \in F(R_\lambda).(F\pi_1)w = \alpha_A(a_1) \wedge (F\pi_2)w = \alpha_A(a_2)\}$$

und für Limeszahlen λ

$$R_\lambda := \bigcap_{\kappa < \lambda} R_\kappa.$$

Dann bildet die Familie $(R_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Ord}}$, wobei Ord die Klasse der Ordinalzahlen bezeichnet, eine absteigende Folge von Mengen, die gegen $\sim_{\mathcal{A}}$ in folgendem Sinne "konvergiert":

- Für jede Ordinalzahl λ gilt $R_\lambda \supseteq \sim_{\mathcal{A}}$.
- Es gibt eine Ordinalzahl λ_0, so daß $R_\kappa = \sim_{\mathcal{A}}$ für jedes $\kappa \geq \lambda_0$ gilt.

Wir nennen R_λ auch die Relation der *λ-Bisimilarität auf $\mathcal{A}$*.

4.2. Moore-Automaten. Wir haben gesehen, daß die größte Bisimulation auf einem Moore-Automaten (A, o_A, δ_A) gerade die Nerode-Kongruenz ist. Die Relationen der λ-Bisimilarität auf (A, o_A, δ_A) haben folgende Gestalt:

$$R_0 := A \times A,$$
$$R_{\lambda+1} := \{(a_1, a_2) \in R_\lambda \mid o_A(a_1) = o_A(a_2) \wedge \forall m \in M.(\delta(a_1, m), \delta(a_2, m)) \in R_\lambda\},$$
$$R_\lambda := \bigcap_{\kappa < \lambda} R_\kappa \quad \text{für Limeszahlen } \lambda.$$

Dieses Verfahren zur Konstruktion der Nerode-Kongruenz ist aus der algebraischen Automatentheorie bekannt (s. z.B. [**HU94**]), ist aber keine algebraische Konstruktion, sondern eine coalgebraische. Dies ist der erste Punkt, an dem ein nützlicher Begriff aus der Automatentheorie vom coalgebraischen Standpunkt aus natürlich ist, nicht aber vom algebraischen Standpunkt.

Man kann leicht beweisen, daß die Approximationen der Nerode-Kongruenz in ω Schritten konvergiert, d.h., daß sogar schon R_ω die Nerode-Kongruenz auf $\mathcal{A}$ ist. In Kapitel 5 werden wir genauer untersuchen, für welche Typen von Coalgebren eine solche Aussage richtig ist. An der Formel für $R_{\lambda+1}$ sieht man recht gut, welche intuitive Bedeutung es hat, wenn zwei Zustände a_1 und a_2 die Eigenschaft haben, n-bisimilar zu sein. Zwei Zustände sollen ja bisimilar sein, wenn sie sich nicht durch Beobachtungen unterscheiden lassen. Bei einem Moore-Automaten können wir beobachten, welche Ausgaben er produziert, wenn er Eingabezeichen erhält. Daß $(a_1, a_2) \in R_n$ gilt, bedeutet, daß sich a_1 und a_2 bei Eingabe von weniger als n Zeichen nicht unterscheiden lassen:

- Die Eingabe von weniger als 0 Zeichen ist nicht möglich, also läßt sich dadurch auch nichts unterscheiden.
- Durch die Eingabe von weniger als einem Zeichen, also durch die Eingabe von 0 Zeichen, können wir nur die Zustände a_1, a_2 unterscheiden, für die $o_A(a_1) \neq o_A(a_2)$ gilt.
- Durch die Eingabe von höchstens $n+1$ Zeichen können wir genau die Zustände a_1, a_2 unterscheiden, für die ein $m \in M$ existiert, so daß wir die Zustände $\delta(a_1, m)$ und $\delta(a_2, m)$ durch Eingabe von höchstens n Zeichen unterscheiden können.
- Zwei Zustände sind genau dann ununterscheidbar, wenn sie für alle Eingaben die gleiche Ausgabe liefern.

Für Mealy-Automaten und für Automaten mit Start- und Endzuständen gelten sehr analoge Aussagen.

4.3. Transitionssysteme. Ist $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ eine $\mathcal{P}$-Coalgebra, also ein Transitionssystem, so schreiben sich die Approximationen der größten Bisimulation $\sim_{\mathcal{A}}$

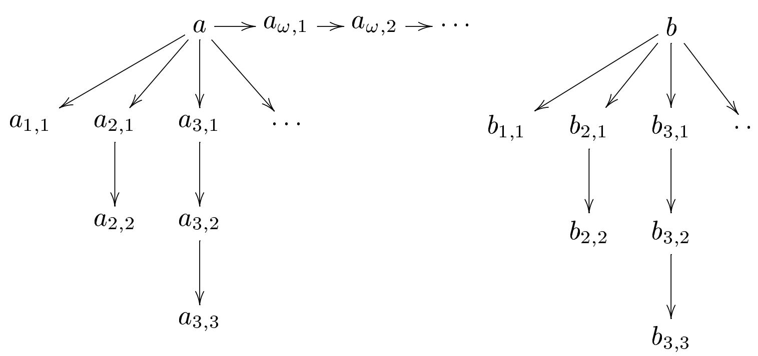
auf $\mathcal{A}$ so:

$$R_0 := A \times A,$$
$$R_{\lambda+1} := \{(a, a') \in R_\lambda \mid \exists U \subseteq R_n.\pi_1[U] = \alpha_A a, \pi_2[U] = \alpha_A a'\}.$$
$$R_\lambda := \bigcap_{\kappa<\lambda} R_\kappa \quad \text{für Limeszahlen}$$

Auch für Transitionssysteme läßt sich für ein $n \in \mathbb{N}$ die Relation R_n der n-Bisimilarität gut interpretieren. Im Transitionssystem $\mathcal{A}$ können wir beobachten, ob wir vom aktuellen Zustand aus eine Transition machen können oder nicht.

- 1-bisimilar sind genau die Zustände $a_1, a_2 \in A$, für die gilt: a_1 hat genau dann einen Nachfolger, wenn a_2 einen Nachfolger hat.
- a_1, a_2 sind 2-bisimilar, wenn es für jeden Nachfolger a'_1 von a_1 einen Nachfolger a'_2 von a_2 gibt, so daß a'_1 und a'_2 1-bisimilar sind, und für jeden Nachfolger a'_2 von a_2 einen Nachfolger a'_1 von a_1, so daß a'_2 und a'_1 1-bisimilar sind.

Im Unterschied zu Moore-Automaten ist die Relation R_ω der ω-Bisimilarität i.a. eine echte Obermenge von $\sim_\mathcal{A}$, also keine Bisimulation. Ein Beispiel hierfür ist folgendes Transitionssystem (A, R_A) (vgl. [**B$^+$00**]):



Von den Punkten a und b geht für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Ast der Länge n aus, vom Punkt a zusätzlich ein unendlich langer Ast. Die zugehörige $\mathcal{P}$-Coalgebra $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ hat die Zustandsmenge

$$A = \{a, b\} \cup \{a_{i,j}, b_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}, i \geq j\} \cup \{a_{\omega,j} \mid j \in \mathbb{N}\},$$

und die Coalgebrenstruktur α_A ist definiert durch folgende Transitionen:

- $a \to a_{i,1}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ und für $i = \omega$.
- $b \to b_{i,1}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.
- $a_{i,j} \to a_{i,j+1}$ für alle i, j mit $j + 1 \leq i$.
- $b_{i,j} \to b_{i,j+1}$ für alle i, j mit $j + 1 \leq i$.

Dann ist leicht zu sehen, daß $(a, b) \in R_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, daß die Zustände a und b also ω-bisimilar sind. Andererseits sind a und b nicht bisimilar: Wären a und b bisimilar, müßte es einen Nachfolger von b geben, der zu $a_{\omega,1}$ bisimilar ist, was offensichtlich nicht der Fall ist.

Es gibt allerdings eine wichtige Klasse von Transitionssystemen, für die ω-Bisimilarität und Bisimilarität übereinstimmen: Es gilt immer $R_\omega = \sim_\mathcal{A}$, wenn $\mathcal{A}$ *bild-endlich* ist, d.h., wenn jeder Zustand von $\mathcal{A}$ nur endlich viele Nachfolger hat.

4.4. Kripke-Strukturen und Modallogik. Wir betrachten jetzt Kripke-Strukturen, also Coalgebren des Funktors $\mathcal{P}(\Phi) \times \mathcal{P}(-)$, wobei Φ eine gegebene Menge von atomaren Aussagen ist. Wir zerlegen die Strukturabbildung α_A der Kripke-Struktur $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ in die beiden Komponenten $\text{prop}_A : A \to \mathcal{P}(\Phi)$ und $\text{succ}_A : A \to \mathcal{P}(A)$.

Man kann Eigenschaften von Kripke-Strukturen mit Hilfe von *modallogischen Formeln* beschreiben (vgl. [**B⁺00**]). Eine Formel $\mathfrak{f}$ der Sprache $\mathcal{L}(\Phi)$ der Modallogik über Φ ist wie folgt definiert:

$$\mathfrak{f} :: \top \mid p \mid \mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f} \mid \neg\mathfrak{f} \mid \Diamond\mathfrak{f},$$

wobei $p \in \Phi$ ist. Als Schreibabkürzung führt man die anderen Booleschen Operatoren sowie $\Box := \neg\Diamond\neg$ ein.

Die Semantik dieser Formeln ist: Sind $\mathcal{A} = (A, \mathrm{prop}_A, \mathrm{succ}_A)$ eine Kripke-Struktur, $a \in A$ ein Zustand, $p \in \Phi$ eine atomare Aussage, so definiert man induktiv, wann eine Formel $\mathfrak{f}$ im Punkt a *gilt*, wofür wir $\mathcal{A}, a \models \mathfrak{f}$ schreiben:

- $\mathcal{A}, a \models \top$ ist immer wahr;
- $\mathcal{A}, a \models p :\iff p \in \mathrm{prop}_A(a)$;
- $\mathcal{A}, a \models \mathfrak{f}_1 \wedge \mathfrak{f}_2 :\iff (\mathcal{A}, a \models \mathfrak{f}_1 \wedge \mathcal{A}, a \models \mathfrak{f}_2)$;
- $\mathcal{A}, a \models \neg\mathfrak{f} :\iff \mathcal{A}, a \not\models \mathfrak{f}$;
- $\mathcal{A}, a \models \Diamond\mathfrak{f} :\iff \exists a' \in \mathrm{succ}_A(a). \mathcal{A}, a' \models \mathfrak{f}$, d.h., in a gilt $\Diamond\mathfrak{f}$, wenn $\mathfrak{f}$ in einem Nachfolger von a gilt.

Modallogische Formeln haben folgende wichtige Eigenschaften:

- Bisimilare Zustände erfüllen genau dieselben modallogischen Formeln, d.h., sie sind *modal äquivalent*.
- Ist $\mathcal{A}$ eine bild-endliche Kripke-Struktur, so sind zwei Zustände von $\mathcal{A}$, die modal äquivalent sind, auch bisimilar.

Dieser enge Zusammenhang zwischen Bisimilarität und Formelgültigkeit ist sehr nützlich, und viele Arbeiten in der Coalgebra beschäftigen sich damit, eine Modallogik für beliebige Typen von Coalgebren zu entwickeln, bzgl. derer Bisimilarität mit logischer Äquivalenz übereinstimmt. Dies wird in Kapitel 5 genauer untersucht.

Auch die Relation der n-Bisimilarität läßt sich durch die Gültigkeit bestimmter Formeln charakterisieren. Man kann jeder modallogischen Formel $\mathfrak{f}$ induktiv einen *Grad* $\deg\mathfrak{f}$ ([**B⁺00**]) zuordnen:

- $\deg(\top) := 0$,
- $\deg(p) := 1$,
- $\deg(\neg\mathfrak{f}) := \deg\mathfrak{f}$,
- $\deg(\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{g}) := \max(\deg\mathfrak{f}, \deg\mathfrak{g})$
- $\deg(\Diamond\mathfrak{f}) := (\deg\mathfrak{f}) + 1$.

Dann sind für $n \in \mathbb{N}$ zwei Zustände a_1, a_2 einer Kripke-Struktur $\mathcal{A}$ genau dann n-bisimilar, sie die gleichen modallogischen Formeln vom Grad $\leq n$ erfüllen, d.h., wenn für alle modallogischen Formeln $\mathfrak{f}$ gilt:

$$\deg(\mathfrak{f}) \leq n \Rightarrow (\mathcal{A}, a_1 \models \mathfrak{f} \iff \mathcal{A}, a_2 \models \mathfrak{f}).$$

Als Korollar erhält man, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Relation der n-Bisimilarität auf einer Kripke-Struktur eine Äquivalenzrelation ist und daß zwei Zustände einer Kripke-Struktur genau dann ω-bisimilar sind, wenn sie modal äquivalent sind.

5. Minimale Realisierungen

Viele Typfunktoren F haben die Eigenschaft, daß die Komposition von F-Bisimulationen wieder eine F-Bisimulation ist (in Kapitel 4 werden wir sehen, daß diese Eigenschaft dazu äquivalent ist, daß F *schwache Pullbacks erhält*). In diesem Fall gilt für jede F-Coalgebra $\mathcal{A}$:

(1) die größte Bisimulation $\sim_{\mathcal{A}}$ ist eine Äquivalenzrelation;
(2) die Coalgebra $\mathcal{A}/\sim_{\mathcal{A}}$ ist *extensional*, d.h, die größte Bisimulation auf $\mathcal{A}/\sim_{\mathcal{A}}$ ist die Diagonale $\Delta_{A/\sim_{\mathcal{A}}} = \{([a]\sim_{\mathcal{A}}, [a]\sim_{\mathcal{A}}) \mid a \in A\}$, wobei $[a]\sim_{\mathcal{A}}$ die Äquivalenzklasse von a bzgl. $\sim_{\mathcal{A}}$ bezeichnet.
(3) Jeder Zustand a von $\mathcal{A}$ ist zum Zustand $[a]\sim_{\mathcal{A}} \in A/\sim_{\mathcal{A}}$ bisimilar.

Dann läßt sich $\mathcal{A}/\sim_{\mathcal{A}}$ als *minimale Realisierung von* $\mathcal{A}$ auffassen, denn in $\mathcal{A}/\sim_{\mathcal{A}}$ sind je zwei Zustände von $\mathcal{A}$, die bisimilar sind, zu einem Zustand verschmolzen worden, und zu jedem Zustand a von $\mathcal{A}$ gibt es einen Zustand von $\mathcal{A}/\sim_{\mathcal{A}}$, der bisimilar zu a ist.

Für **Moore-Automaten** gelten die obigen Aussagen, und man erhält eine aus der Automatentheorie bekannte Konstruktion: Die minimale Realisierung eines Automaten $\mathcal{A} = (A, o_A, \delta_A)$ ist gerade der Minimalautomat von $\mathcal{A}$, und man kann diesen Minimalautomaten konstruieren, indem man $\mathcal{A}$ durch die Nerode-Kongruenz auf $\mathcal{A}$ faktorisiert.

Auch für **Mealy-Automaten**, **Transitionssysteme** und **topologische Räume** gelten die Aussagen (1)-(3).

Man kann die Eigenschaft, daß eine Coalgebra extensional ist, in Form einer Herleitungsregel ausdrücken:

$$\frac{x \sim y}{x = y}$$

Man nennt dies das *Extensionalitätsprinzip* oder *Coinduktionsprinzip*. Diese Regel ermöglicht *coinduktive Beweise*: Um nachzuweisen, daß zwei Elemente einer extensionalen Coalgebra gleich sind, muß man nur eine Bisimulation auf dieser Coalgebra angeben, die diese beiden Elemente in Beziehung setzt.

6. Terminale Coalgebren und coinduktive Definitionen

Neben coinduktiven Beweisen sind auch coinduktive Definitionen möglich. Dies wollen wir in diesem Abschnitt ausführen.

6.1. Terminale Coalgebren. Eine *terminale F-Coalgebra* ist ein terminales Objekt in der Kategorie $\mathbf{Set}_F$ der F-Coalgebren, d.h., eine F-Coalgebra $\mathcal{T} = (T, \alpha_T)$ ist terminal, wenn es für jede F-Coalgebra $\mathcal{A}$ genau einen F-Homomorphismus $!_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ gibt.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "!_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & T \arrow[d, "\alpha_T"] \\ FA \arrow[r, dashed, "F(!_{\mathcal{A}})"'] & FT \end{tikzcd}$$

Wir werden in Kapitel 3 einige Eigenschaften von terminalen Coalgebren kennenlernen und in Kapitel 5 ausführlicher untersuchen, unter welchen Voraussetzungen terminale Coalgebren existieren.

Wenn eine terminale F-Coalgebra $\mathcal{T} = (T, \alpha_T)$ existiert, kann man Mengenabbildungen $A \to T$ coinduktiv definieren, indem man A mit einer geeigneten F-Coalgebrenstruktur versieht und den davon induzierten Homomorphismus in die terminale Coalgebra betrachtet.

6.2. Der terminale Automat. Über jedem Eingabealphabet M und jedem Ausgabealphabet C existiert ein terminaler Automat $\mathcal{T}$: Die Grundmenge dieses Automaten ist die Menge $T := C^{M^*}$, die Transitionsstruktur ist wie folgt gegeben: Die Ausgabefunktion ist

$$o_T : C^{M^*} \to C, \varphi \mapsto \varphi(\varepsilon),$$

die Übergangsfunktion ist

$$\delta_T : C^{M^*} \times M \to C^{M^*},\ \delta_T(\varphi, m)(w) := \varphi(m \cdot w).$$

Es ist leicht zu sehen, daß der so definierte Automat in der Tat terminal ist: Ist $\mathcal{A}$ ein Automat, so müssen wir einen eindeutigen Homomorphismus $!_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ finden.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "!_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "(o_A, \delta'_A)"'] & C^{M^*} \arrow[d, "(o_T, \delta'_T)"] \\ C \times A^M \arrow[r, dashed, "\mathrm{id}_C \times (!_{\mathcal{A}})^M"'] & C \times C^{M^*} \end{tikzcd}$$

Ist $a \in A$, so ist $!_{\mathcal{A}}(a)$ die Abbildung $M^* \to C$, die jedem Wort $w \in M^*$ die Ausgabe zuordnet, die der Automat $\mathcal{A}$ erzeugt, wenn er im Zustand a gestartet wird und die Eingabe w erhält, d.h.

$$!_{\mathcal{A}}(a)(w) = o_A(\delta^*_A(a, w)).$$

Daß es für jeden Automaten genau einen Homomorphismus nach $\mathcal{T}$ gibt, läßt sich ausnutzen, um Abbildungen von einer Menge A nach T zu definieren, indem man A mit einer geeigneten Automatenstruktur α_A versieht. Der daraus resultierende Homomorphismus $(A, \alpha_A) \to \mathcal{T}$ ist *von α_A coinduktiv definiert.* Hiervon betrachten wir jetzt eine Anwendung.

6.3. Operationen auf Strömen. Operationen auf unendlichen Strömen lassen sich gut coinduktiv definieren (das folgende Beispiel stammt aus [**Rut00b**], wo sich etliche weitere finden): Ein Automat mit einer einelementigen Eingabemenge und einer Ausgabemenge C besteht aus einer Menge A zusammen mit einer Ausgabefunktion $o_A : A \to C$ und einer Nachfolgerfunktion $\delta_A : A \to A$. Der terminale Automat ist dann gerade die Menge C^ω der unendlichen Ströme über C mit der Ausgabefunktion $\mathrm{head} : C^\omega \to C$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto c_0$, und der Nachfolgerfunktion $\mathrm{tail} : C^\omega \to C^\omega$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (c_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "!_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "(o_A, \delta_A)"'] & C^\omega \arrow[d, "(\mathrm{head},\mathrm{tail})"] \\ C \times A \arrow[r, dashed, "\mathrm{id}_C \times !_{\mathcal{A}}"'] & C \times C^\omega \end{tikzcd}$$

Wir wählen als Beispiel $A := C^\omega \times C^\omega$ und wollen eine Funktion $\mathrm{zip} : A \to C^\omega$ definieren, die zwei Ströme mischt, d.h., es soll

$$\mathrm{zip}((c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (c_0, d_0, c_1, d_1, \cdots)$$

gelten. Wir betrachten auf A folgende Automatenstruktur:

$$\begin{aligned} o_{\mathrm{zip}}((c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}) &:= c_0 \\ \delta_{\mathrm{zip}}((c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}) &:= ((d_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}). \end{aligned}$$

Sei dann $\mathrm{zip} : A \to C^\omega$ die von dieser Automatenstruktur coinduktiv definierte Abbildung. Dann leistet zip das Gewünschte: Daß $\mathrm{zip} : (A, o_{\mathrm{zip}}, \delta_{\mathrm{zip}}) \to (C^\omega, (\mathrm{head}, \mathrm{tail}))$ ein Homomorphismus ist, besagt, daß folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{zip}"] \arrow[d, "o_{\mathrm{zip}}"'] & C^\omega \arrow[d, "\mathrm{head}"] \\ C \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{zip}"] \arrow[d, "\delta_{\mathrm{zip}}"'] & C^\omega \arrow[d, "\mathrm{tail}"] \\ A \arrow[r, "\mathrm{zip}"'] & C^\omega \end{tikzcd}$$

Das erste Diagramm zeigt, daß das erste Element der Folge $\mathrm{zip}((c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}})$ gleich c_0 ist. Das zweite Element dieses Folge ist $\mathrm{head}(\mathrm{tail}(\mathrm{zip}((c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}})))$, durch Kombination beider Diagramme berechnen wir

$$\begin{aligned}
&\mathrm{head}(\mathrm{tail}(\mathrm{zip}((c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}})))\\
&= \mathrm{head}(\mathrm{zip}(\delta_{\mathrm{zip}}((c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}})))\\
&= \mathrm{head}(\mathrm{zip}((d_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})) = o_{\mathrm{zip}}((d_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})\\
&= d_0 \ \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Um Eigenschaften coinduktiv definierter Funktionen zu beweisen, sind häufig coinduktive Beweise nützlich, man vgl. [**Rut00b**] für Beispiele.

6.4. Terminale Transitionssysteme. Die Faktorisierung eines Transitionssystems $\mathcal{A}$ nach der größten Bisimulation $\sim_{\mathcal{A}}$ ist wie im Falle von Automaten extensional, erlaubt also Beweise durch Coinduktion. Im Unterschied zu Automaten ist es nicht möglich, ein terminales Transitionssystem zu konstruieren. Es gibt allerdings ein Transitionssystem, das terminal in der Klasse der bild-endlichen Transitionssysteme ist, so daß man für bild-endliche Transitionssysteme coinduktive Definitionen durchführen kann. Die Beschreibung dieses terminalen bild-endlichen Transitionssystems ist nicht so einfach wie im Falle des terminalen Automaten; wir werden dies in Kapitel 5 näher untersuchen.

7. Typtransformationen

Häufig ist es möglich, aus einer Coalgebra eines Typs eine Coalgebra eines anderen Typs zu konstruieren:

1. Jeder Moore-Automat läßt sich als Mealy-Automat auffassen: Ist $(A, o_{A,\mathrm{Moore}} : A \to C, \delta_A : A \times M \to A)$ ein Moore-Automat, so erhält man einen Mealy-Automaten $(A, o_{A,\mathrm{Mealy}} : A \times M \to C, \delta_A : A \times M \to A)$ über denselben (nicht-leeren) Ein- und Ausgabemengen M bzw. C, indem man für $a \in A$ und $m \in M$
$$o_{A,\mathrm{Mealy}}(a, m) := o_{A,\mathrm{Moore}}(a)$$
setzt.
2. Jeder Moore-Automat (A, o_A, δ_A) mit Eingabemenge M und Ausgabemenge C läßt sich als Coalgebra (A, α_A) des Funktors $C \times \mathcal{P}(-)^M$ auffassen, indem man für $a \in A$
$$\alpha_A(a) := (o_A(c), \lambda m.\{\delta_A(a, m)\})$$
definiert.
3. Sind $\gamma : C \to D$ und $\theta : N \to M$ Abbildungen, so kann man aus einem Moore-Automaten $(A, o_{A,C}, \delta_{A,M})$ mit Eingabemenge M und Ausgabemenge C einen Moore-Automaten $(A, o_{A,D}, \delta_{A,N})$ mit Eingabemenge N und Ausgabemenge D machen, indem man für $a \in A$ und $n \in N$
$$\begin{aligned} o_{A,D}(a) &:= \gamma(o_{A,C}(a))\\ \delta_{A,N}(a, n) &:= \delta_{A,M}(a, \theta(n)) \end{aligned}$$
setzt.

Wir formalisieren solche Konstruktionen durch natürliche Transformationen zwischen den Typfunktoren . Genauer: Ist $\nu : G \xrightarrow{\bullet} F$ eine natürliche Transformationen zwischen den **Set**-Endofunktoren G und F, so können wir jede G-Coalgebra (A, α_A) auch als F-Coalgebra $(A, \nu_A \circ \alpha_A)$ auffassen, und die Natürlichkeitsvoraussetzung an ν garantiert, daß jeder G-Homomorphismus zwischen zwei G-Coalgebren auch ein F-Homomorphismus der transformatierten Coalgebren ist:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & B \arrow[d, "\alpha_B"] \\ GA \arrow[r, "G\varphi"'] \arrow[d, "\nu_A"'] & GB \arrow[d, "\nu_B"] \\ FA \arrow[r, "F\varphi"'] & FB \end{tikzcd}$$

Die betrachteten Beispiele lassen sich durch folgende natürliche Transformationen wiedergewinnen:

1. Die Komponenten
$$\nu_A : C \times A^M \to C^M \times A^M, \ \ (c, f) \mapsto (\lambda m.c, f)$$
definieren eine natürliche Transformation $C \times (-)^M \xrightarrow{\bullet} C^M \times (-)^M$, mit deren Hilfe sich ein Moore-Automat als Mealy-Automat auffassen läßt.
2. Um einen Moore-Automaten mit Eingabemenge M und Ausgabemenge C als Coalgebra des Funktors $C \times \mathcal{P}(-)^M$ aufzufassen, muß man nur die natürliche Transformation $\nu : C \times (-)^M \xrightarrow{\bullet} C \times \mathcal{P}(-)^M$ betrachten, die durch die Komponenten
$$\nu_A : C \times A^M \to C \times \mathcal{P}(A)^M, \ \ (c, f) \mapsto (c, \lambda m.\{fm\})$$
gegeben ist.
3. Sind $\gamma : C \to D$ und $\theta : N \to M$ Abbildungen, so erhält man eine natürliche Transformation
$$\nu : C \times (-)^M \xrightarrow{\bullet} D \times (-)^N,$$
indem man
$$\nu_A(c, f) := (\gamma c, f \circ \theta)$$
definiert.

Besonders interessant sind natürliche Transformationen $\nu : G \xrightarrow{\bullet} F$, deren Komponenten injektiv oder surjektiv sind. Sind alle ν_A injektiv, so können wir die G-Coalgebren als Teilklasse der F-Coalgebren auffassen. Sind alle ν_A surjektiv, so können wir jede F-Coalgebra als Äquivalenzklasse von G-Coalgebren auffassen. Wir werden in Kapitel 5 sehen, daß man unter gewissen Voraussetzungen an F jede F-Coalgebra als Äquivalenzklasse von Moore-Automaten auffassen kann.

8. Literatur

Eine Einführung in die algebraische Automatentheorie findet man z.B. in den Lehrbüchern [**HU94**] von Hopcroft und Ullman oder [**Eil74**] von Eilenberg, während Jan Rutten in [**Rut98a, Rut00a**] eine coalgebraische Automatentheorie entwickelt. In [**Rut95**] untersucht Rutten Transitionssysteme mit coalgebraischen Methoden. Seine grundlegende Arbeit [**Rut00b**] enthält ebenfalls eine Reihe von Beispielen. In [**dVR99**] betrachten de Vink und Rutten stochastische Transitionssysteme als Coalgebren. Eine Einführung in Coalgebren unter Betonung der Zusammenhänge zu Programmiersprachen wird im Tutorial [**JR97**] von Jacobs und Rutten gegeben, und in [**Jac96**] beschäftigt sich Jacobs mit der coalgebraischen Modellierung von Klassen in objektorientierten Sprachen. H. Peter Gumm untersucht in [**Gum01b**] die Coalgebren des Filterfunktors. Literaturhinweise zur Theorie der Coalgebra werden in den nächsten Kapiteln gegeben.

KAPITEL 3

Grundbegriffe der Coalgebra

Dieses Kapitel enthält grundlegende Aussagen über Coalgebren eines **Set**-Endofunktors F. Hierbei liegt der Schwerpunkt auf Resultaten, die sich ohne weitere Voraussetzungen an F beweisen lassen, während in den Kapiteln 4 und 5 genauer die Korrespondenz zwischen bestimmten Eigenschaften von F - wie das (schwache) Erhalten gewisser Limites oder Beschränktheit - und der Struktur der Kategorie der Coalgebren dieses Funktors untersucht wird.

Die Theorie der Coalgebra hat sich aus Ruttens Arbeit [**Rut00b**] entwickelt, die als Technischer Bericht 1996 erschienen ist. In [**Gum99**] hat H. Peter Gumm die Ergebnisse von [**Rut00b**] auf den Stand des Jahres 1999 gebracht; hierin ist auch ein Teil der Ergebnisse aus [**GS01b, GS00, GS01d**] eingearbeitet. In diesem Kapitel stelle ich die für diese Arbeit wichtigen Ergebnisse aus [**Gum99, Rut00b**] (meist ohne Beweis) vor, außerdem sind einige kleinere neue Resultate eingeflossen.

Inhaltsangabe

1. Die Kategorie $\mathbf{Set}_F$

Sei $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ ein **Set**-Endofunktor, der *Typfunktor*. Eine *(F-)Coalgebra* oder *Coalgebra vom Typ F* ist ein Paar $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$, bestehend aus einer Menge $A \in \mathbf{Set}$, der *Zustands-* oder *Trägermenge*, und einer Abbildung $\alpha_A : A \to FA$, der *Coalgebren-* oder *Transitionsstruktur* oder *Strukturabbildung*. Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei F-Coalgebren und ist $\varphi : A \to B$ eine Abbildung zwischen den Trägermengen, so ist φ ein *(F-Coalgebren)-Homomorphismus*, wenn $F(\varphi) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ \varphi$ gilt, also das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & B \arrow[d, "\alpha_B"] \\ FA \arrow[r, "F(\varphi)"'] & FB \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die F-Coalgebren und F-Homomorphismen bilden eine Kategorie $\mathbf{Set}_F$. Der *Vergißfunktor* $U : \mathbf{Set}_F \to \mathbf{Set}$ ordnet einer F-Coalgebra $\mathcal{A}$ ihre

Trägermenge A zu, einem F-Homomorphismus $\varphi : (A, \alpha_A) \to (B, \alpha_B)$ die Abbildung $\varphi : A \to B$. Der Vergißfunktor ist das Bindeglied zwischen den Kategorien **Set** und $\mathbf{Set}_F$. Wir werden uns in dieser Arbeit an vielen Stellen mit der Frage beschäftigen, welche Eigenschaften sich von **Set** auf $\mathbf{Set}_F$ übertragen. Die grundlegende Aussage zu (Co-)Limites in $\mathbf{Set}_F$ findet sich schon bei Lambek [**Lam68**] und in allgemeinerer Form bei Barr [**Bar93**]:

SATZ 3.1 ([**Lam68, Bar93**]). *Der Vergißfunktor $U : \mathbf{Set}_F \to \mathbf{Set}$ erzeugt jeden Colimes und erzeugt jeden Limes, den F erhält. Insbesondere ist $\mathbf{Set}_F$ covollständig, und man erhält den Colimes eines Diagramms $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$, indem man den Colimes von $U\bar{\mathfrak{D}}$ in* **Set** *bildet und ihn mit einer (eindeutig bestimmten) F-Coalgebrenstruktur versieht.*

Die Notation $U\bar{\mathfrak{D}}$ ist dabei wie folgt zu verstehen: Ein Diagramm $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$ ist ein Funktor von einer kleinen (Index-)Kategorie I nach $\mathbf{Set}_F$. $U\bar{\mathfrak{D}}$ ist dann die Komposition des Vergißfunktors $U : \mathbf{Set}_F \to \mathbf{Set}$ mit $\bar{\mathfrak{D}}$.

Ein Limes kann in $\mathbf{Set}_F$ auch dann existieren, wenn F Limites dieses Typs nicht erhält. Dies und die Konstruktion von Limites in $\mathbf{Set}_F$ werden wir in den folgenden Kapiteln näher untersuchen.

KONVENTION . ***Im folgenden seien F, G immer - wenn nicht anders erwähnt -* Set*-Endofunktoren. Coalgebren bezeichnen wir mit geschwungenen Buchstaben: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, und wenn nicht anders erwähnt, handelt es sich dabei immer um F-Coalgebren. Die zugehörigen Trägermengen heißen dann A, B, C, die Coalgebren-Strukturen $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C$. Abbildungen zwischen Mengen bezeichnen wir meist mit kleinen lateinischen Buchstaben (f, g, h), (F)-Homomorphismen meist mit kleinen griechischen Buchstaben (φ, ψ). Mit U wird der Vergißfunktor $\mathrm{Set}_F \to \mathrm{Set}$ bezeichnet. Ist A eine Teilmenge von B, so bezeichnet $\subseteq_A^B$ die kanonische Einbettung. In einem Diagramm bezeichnet $\hookrightarrow$ eine injektive, $\twoheadrightarrow$ eine surjektive Abbildung. Für eine Abbildung $f : A \to B$ und Teilmengen $U \subseteq A$, $V \subseteq B$ ist $f[U] := \{fu \mid u \in U\} \subseteq B$ das* Bild von *U* unter *f, $f^-[V] := \{a \in A \mid fa \in V\}$ das* Urbild von *V* unter *f. Ist A eine Menge, so ist $\emptyset_A : \emptyset \to A$ die leere Abbildung mit Wertebereich A. Für eine Menge A ist $\mathrm{id}_A : A \to A$ die Identitätsabbildung auf A. Ist $R \subseteq \prod_{i \in I} A_i$ eine I-stellige Relation, so bezeichnen wir mit π_i oder π_i^R die kanonische Projektion $R \to A_i$.***

Man kann auch eine Kategorie $\mathbf{Set}^F$ von *F-Algebren* betrachten. Eine F-Algebra ist ein Paar $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$, bestehend aus einer Menge $A \in \mathbf{Set}$ und einer Abbildung $\alpha_A : FA \to A$. Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei F-Algebren und ist $\varphi : A \to B$ eine Abbildung zwischen den Trägermengen, so heißt φ *(F-Algebren)-Homomorphismus*, wenn $\alpha_B \circ F(\varphi) = \varphi \circ \alpha_A$ gilt. Dies verallgemeinert den Begriff der *Algebra einer Signatur* aus der Universellen Algebra (s. z.B. [**RT94**] von Rutten und Turi).

Noch allgemeiner kann man für jeden Endofunktor F einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ auf offensichtliche Weise die Kategorie $\mathcal{C}_F$ der F-Coalgebren über $\mathcal{C}$ und die Kategorie $\mathcal{C}^F$ der F-Algebren über $\mathcal{C}$ definieren, und auch etliche Resultate der folgenden Kapitel lassen sich auf $\mathcal{C}_F$ übertragen (für Untersuchungen hierzu vgl. man z.B. die Arbeiten [**Kur98, Kur00, Kur01**] von Alexander Kurz). Diese Verallgemeinerung wird in dieser Arbeit nicht verfolgt, und zwar aus folgenden Gründen:

- Die Struktur der Kategorie **Set** der Mengen ermöglicht es an vielen Stellen, recht abstrakte kategorientheoretische Überlegungen durch einfache mengentheoretische Argumente zu ersetzen.
- Viele Ergebnisse sind wirklich von speziellen Eigenschaften der Kategorie **Set** abhängig.

- Fast alle bislang bekannten Anwendungen bewegen sich in der Kategorie der Mengen.
- Schon für Coalgebren über **Set** gibt es eine große Zahl an ungelösten interessanten Problemen.

Man sollte noch bemerken - und das wird sich an vielen Stellen zeigen -, daß die Theorie der Coalgebra *nicht* dual zur Theorie der Universellen Algebra ist. Zwar sind etliche Resultate dual zueinander, und die Universelle Algebra ist eine wichtige Inspirationsquelle für die Coalgebra, aber nichtsdestoweniger gibt es auch eine Reihe von wesentlichen Unterschieden. Kategorientheoretisch lassen sich diese Unterschiede daraus erklären (s. Moss und Danner [**MD97**]), daß Coalgebren des Funktors F dual zu Algebren des dualen Funktors $F^{op} : \mathbf{Set}^{op} \to \mathbf{Set}^{op}$ sind, wobei $\mathbf{Set}^{op}$ die zu **Set** duale Kategorie ist, nicht aber dual zu Algebren eines Funktors $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$. Die Kategorie **Set** ist nicht selbst-dual, wie man z.B. an folgenden Beispielen sieht:

- In **Set** sind nur monos mit nicht-leerem Definitionsbereich invertierbar, aber nach dem Auswahlaxiom, das in dieser Arbeit vorausgesetzt wird, alle epis, d.h., in $\mathbf{Set}^{op}$ sind alle monos invertierbar.
- In **Set** gilt für alle Mengen A, B, C die Gleichung $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$, d.h., Produkte distribuieren über Summen, aber die duale Gleichung $A + (B \times C) = (A + B) \times (A + C)$ ist fast nie erfüllt.

Nun einige Beispiele für **Set**-Funktoren und die zugehörigen Coalgebren:

Beispiel 3.2 (Polynomiale Funktoren, Automaten): Die Klasse der *polynomialen Funktoren* ist die kleinste Klasse, die gegen Summen und Produkte abgeschlossen ist und folgende Funktoren enthält:

- den Identitätsfunktors $\mathcal{I}$, der jeder Menge die Menge selbst und jeder Abbildung die Abbildung selbst zuordnet;
- die konstanten Funktoren, d.h., jeden Funktor F, für den eine Menge C existiert mit $F(A) = C$ für alle Mengen A und $F(f) = \mathrm{id}_C$ für jede Abbildung f.
- die darstellbaren Funktoren, d.h. Funktoren der Gestalt $(-)^M$ für eine Menge M. Dabei ist $A^M = \{h : M \to A\}$ für eine Menge A definiert, $f^M : A^M \to B^M$ ist für eine Abbildung $f : A \to B$ gegeben durch $h \mapsto f \circ h$.

Coalgebren polynomialer Funktoren gehören zu den am besten untersuchten Coalgebren (z.B. von Bart Jacobs in [**Jac96**] und Martin Rößiger in [**Röß00**]), sie dienen u.a. zur Modellierung von Automaten und von Programmen in objektorientierten Programmiersprachen. Eine wichtige Teilklasse der polynomialen Funktoren haben wir schon in Kapitel 2 betrachtet, nämlich Funktoren der Gestalt $C \times (-)^M$, deren Coalgebren Moore-Automaten mit Eingabealphabet M und Ausgabealphabet C sind. Wir werden wie in Kapitel 2 für $C \times (-)^M$-Coalgebren $(A, \alpha_A : A \to C \times A^M)$ auch die Automatenschreibweise $(A, o_A : A \to C, \delta_A : A \times M \to A)$ verwenden. Da die in Kapitel 2 ebenfalls betrachteten Mealy-Automaten in dieser Arbeit nicht weiter von Bedeutung sein werden, reden wir nur noch von Automaten, wenn wir Moore-Automaten meinen.

Ein Homomorphismus zwischen den $C \times (-)^M$-Coalgebren $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ und $\mathcal{B} = (B, \alpha_B)$ ist eine Abbildung $\varphi : A \to B$, die für alle $a \in A$ und jedes $m \in M$

$$o_A(a) = o_B(\varphi a) \text{ und } \varphi(\delta_A(a, m)) = \delta_B(\varphi(a), m)$$

erfüllt, wie schon in Kapitel 2 erläutert.

Beispiel 3.3: Eine reiche Quelle von Gegenbeispielen ist der Funktor $(-)^3_2$, eingeführt von Aczel und Mendler in [**AM89**]. $(-)^3_2$ ist auf einer Menge A definiert durch

$$A^3_2 := \{(a_1, a_2, a_3) \in A^3 \mid |\{a_1, a_2, a_3\}| \leq 2\},$$

d.h., A^3_2 ist die Menge aller Tripel von Elementen aus A, von denen mindestens zwei Komponenten gleich sind. Für eine Abbildung $f : A \to B$ ist f^3_2 die Einschränkung von $f^3 : A^3 \to B^3$, $(-)^3_2$ ist also ein Unterfunktor des Funktors $(-)^3$.

Beispiel 3.4 (Transitionssysteme): Wie in Kapitel 2 besprochen, kann man Transitionssysteme als Coalgebren des Potenzmengenfunktors $\mathcal{P}$ auffassen, der jeder Menge A die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ zuordnet, jeder Abbildung $f : A \to B$ die Abbildung

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), \;\; U \mapsto f[U].$$

Eine Abbildung $\varphi : A \to B$ ist genau dann ein Homomorphismus zwischen den $\mathcal{P}$-Coalgebren $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, wenn für alle $a \in A$ gilt:

- $a \to_A a' \Rightarrow \varphi(a) \to_B \varphi(a')$;
- für alle $b' \in B$ folgt aus $\varphi(a) \to_B b'$, daß ein $a' \in A$ existiert mit $a \to_A a'$ und $\varphi(a') = b'$.

Hierbei haben wir die in Kapitel 2 eingeführte Pfeilnotation verwendet: $a \to_A a' :\Longleftrightarrow a' \in \alpha_A(a)$.

Beispiel 3.5 (Modifikationen des Potenzmengenfunktor): Es gibt viele interessante Modifikationen des Potenzmengenfunktors. So kann man für eine Kardinalzahl κ den Funktor $\mathcal{P}_{<\kappa} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ betrachten, definiert auf Mengen durch

$$\mathcal{P}_{<\kappa}(A) := \{U \subseteq A \mid |U| < \kappa\},$$

auf Abbildungen $f : A \to B$ ist $\mathcal{P}_{<\kappa} f$ die Einschränkung von $\mathcal{P} f$. Der *endliche Potenzmengenfunktor* $\mathcal{P}_{<\omega}$ wird häufig auch mit $\mathcal{P}_f$ bezeichnet. $\mathcal{P}_{<\kappa}$-Coalgebren sind Transitionssysteme, in denen jeder Zustand weniger als κ Nachfolger hat. Allgemeiner werden wir in Definition 5.2 für jeden Funktor solche "strikt κ-beschränkten Varianten" definieren.

Beispiel 3.6 (Filter-Funktor): Der Filterfunktor $\mathcal{F} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ ordnet jeder Menge A die Menge $\mathcal{F}(A)$ aller Filter auf A zu (einschließlich des trivialen Filters $\mathcal{P}(A)$). Für jede Abbildung $f : A \to B$ und jeden Filter $\mathfrak{u}$ auf A setzt man

$$(\mathcal{F} f)(\mathfrak{u}) :=\uparrow \{f[U] \mid U \in \mathfrak{u}\},$$

wobei die rechte Seite den von den $f[U]$ erzeugten Filter meint. Mit Hilfe des Filterfunktors lassen sich z.B. topologische Räume coalgebraisch modellieren, wie wir in Kapitel 2 gesehen haben. Für eine genauere Untersuchung des Filterfunktors vgl. man H. Peter Gumms Artikel [**Gum01b**].

2. Set-Endofunktoren

Über **Set**-Endofunktoren lassen sich viel genauere Aussagen machen als über allgemeine Funktoren. In diesem Abschnitt stellen wir einige Eigenschaften von **Set**-Endofunktoren dar, die im folgenden stillschweigend verwendet werden. In diesem Abschnitt - wie auch in der sonstigen Arbeit - sei F ein **Set**-Endofunktor.

Gilt $FA = \emptyset$ für eine Menge $A \neq \emptyset$, so ist F der leere Funktor, d.h., es gilt $FB = \emptyset$ für jede Menge B. Zum Beweis muß man nur bemerken, daß es eine Abbildung $f : B \to A$ gibt, also $Ff : FB \to FA = \emptyset$ eine Abbildung in die leere Menge ist. Wir werden immer annehmen, daß F nicht der leere Funktor ist.

Da in **Set** jede surjektive Abbildung nach dem Auswahlaxiom, das wir in dieser Arbeit voraussetzen, eine Rechtsinverse hat, jede injektive Abbildung mit nichtleerem Definitionsbereich eine Linksinverse, ist für jede surjektive Abbildung $f : A \twoheadrightarrow B$ auch Ff surjektiv und für jede injektive Abbildung $i : A \hookrightarrow B$ mit $A \neq \emptyset$ auch Fi injektiv.

Sind $U, V \subseteq A$ zwei Mengen, so nennt man den Pullback von $\subseteq_U^A$ mit $\subseteq_V^A$ den *Schnitt* von U und V. Eine wichtige Eigenschaft von **Set**-Endofunktoren ist, daß sie *endliche nicht-leere Schnitte* erhalten, d.h., jeden Pullback von endlich vielen injektiven Abbildungen (oder äquivalenterweise: von endlich vielen kanonischen Injektionen), dessen Grundmenge nicht leer ist.

LEMMA 3.7 (Manes [**Man98**]). *Gegeben sei ein kommutatives Diagramm in* **Set**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "h"'] & B \arrow[r, two heads, "f^-"] \arrow[d, hook, "k"] & A \arrow[d, hook, "h"] \\ C \arrow[r, hook, "g"'] & D \arrow[r, two heads, "g^-"'] & C, \end{tikzcd}$$

für das gilt:

- $f^- \circ f = \mathrm{id}_A$ *und* $g^- \circ g = \mathrm{id}_C$*;*
- $B \neq \emptyset$ *(und damit sind auch alle anderen Mengen im Diagramm nicht leer).*

Dann ist das linke Quadrat ein Pullback, und F erhält diesen Pullback.

BEWEIS. Sei $(Q, q_B : Q \to B, q_C : Q \to C)$ ein Konkurrent von (A, f, h). Eine Diagrammjagd zeigt, daß $f^- \circ q_B : Q \to A$ ein vermittelnder Morphismus ist, und da f injektiv ist, ist dieser vermittelnde Morphismus eindeutig. Daß F diesen Pullback erhält, folgt daraus, daß auch $F(f^-) \circ Ff = \mathrm{id}_{FA}$ und $F(g^-) \circ Fg = \mathrm{id}_{FC}$ sowie $FB \neq \emptyset$ gilt, sich also der erste Teil des Lemmas auf das Bild des obigen Diagramms unter F anwenden läßt. $\square$

Sind $U, V \subseteq A$ Mengen mit $U \cap V \neq \emptyset$, so können wir das Lemma auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, hook, "\subseteq^U_{U\cap V}"] \arrow[d, hook, "\subseteq^V_{U\cap V}"'] & U \arrow[r, two heads, "(\subseteq^U_{U\cap V})^-"] \arrow[d, hook, "\subseteq^A_U"] & U \cap V \arrow[d, hook, "\subseteq^V_{U\cap V}"] \\ V \arrow[r, hook, "\subseteq^A_V"'] & A \arrow[r, two heads, "(\subseteq^A_V)^-"'] & V, \end{tikzcd}$$

anwenden, wobei die gesuchten Linksinversen wie folgt gewählt sind: Wir wählen ein beliebiges Element $e \in U \cap V$ und setzen

$$(\subseteq^U_{U\cap V})^-(u) := \begin{cases} u & u \in U \cap V \\ e & \text{sonst} \end{cases} \qquad (\subseteq^A_V)^-(a) := \begin{cases} a & a \in V \\ e & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir schließen:

SATZ 3.8 (Trnková [**Trn69**]). *F erhält nicht-leere endliche Schnitte.*

Nicht jeder **Set**-Endofunktor erhält auch endliche Schnitte mit leerer Grundmenge. Wir werden allerdings oft annehmen können, daß F diese Eigenschaften hat, denn es gilt:

SATZ 3.9 ([**Trn69**]). *Es gibt einen Funktor F^r, der alle endlichen Schnitte erhält und mit F auf allen nichtleeren Mengen und nichtleeren Abbildungen übereinstimmt. Insbesondere ist für jede Menge A die Abbildung $F^r(\emptyset_A)$ injektiv.*

*Genauer: Sei $\hat{1}$: **Set** $\to$ **Set** der Unterfunktor des konstanten Funktors mit Wert $1 = \{*\}$, definiert durch $\hat{1}A := 1$ für alle nichtleeren Mengen A und durch $\hat{1}(\emptyset) := \emptyset$. Dann kann man $F^r(\emptyset)$ als die Menge der natürlichen Transformationen von $\hat{1}$ in F definieren und $F^r(\emptyset_A)(\nu) := \nu_A(*)$ für $A \neq \emptyset$ setzen.*

Sind F, G zwei Funktoren, die sich nur auf der leeren Menge und den leeren Abbildungen unterscheiden, dann sind $\mathbf{Set}_F$ und $\mathbf{Set}_G$ isomorph (d.h., es gibt einen invertierbaren Funktor $\mathbf{Set}_F \to \mathbf{Set}_G$, s. [**HS73**]). Auf der leeren Menge gibt es immer genau eine Coalgebrenstruktur, und jede leere Abbildung ist ein Homomorphismus. Daher werden wir uns selten darum kümmern, wie der Typfunktor F auf der leeren Menge und den leeren Abbildungen definiert ist. Im Lichte des eben zitierten Satzes wird es meistens am bequemsten sein, anzunehmen, daß F alle endlichen Schnitte erhält.

KONVENTION . ***Ab jetzt werden wir in der gesamten Arbeit annehmen - wenn nicht anders erwähnt -, daß alle betrachteten* Set*-Endofunktoren alle endlichen Schnitte erhalten und ungleich dem leeren Funktor sind.***

Daß F endliche Schnitte erhält, ist äquivalent dazu, daß für alle Mengen A die Abbildung $F(\emptyset_A)$ injektiv ist und für alle $U, V \subseteq A$ die Gleichung

$$F(\subseteq^A_{U\cap V})[F(U \cap V)] = F(\subseteq^A_U)[FU] \cap F(\subseteq^A_V)[FV]$$

gilt. Es wäre intuitiver, statt dieser Gleichung die Gleichung

$$F(U \cap V) = F(U) \cap F(V)$$

zu haben. Dazu benötigt man, daß F *Inklusionen erhält* bzw. *standard* ist, d.h., für jede Teilmenge $U \subseteq A$ ist auch FU eine Teilmenge von FA, und es gilt $F(\subseteq^A_U) = \subseteq^{FA}_{FU}$. In [**AKP72, AT90**] wird von J. Adámek, V. Koubek und V. Pohlova bzw. J. Adámek und V. Trnková bewiesen, daß jeder **Set**-Funktor bis auf die leere Menge und die leeren Abbildungen natürlich isomorph zu einem Funktor ist, der standard ist. Daher kann man meist annehmen, daß F standard ist.

Sind F, G zwei Funktoren, so heißt F *Unterfunktor von* G , wenn eine *injektive* natürliche Transformation $\nu : F \overset{\bullet}{\to} G$ existiert, d.h., ν ist eine natürliche Transformation, und für $A \neq \emptyset$ ist die Komponente $\nu_A : FA \to GA$ injektiv. Wir werden meist ignorieren, ob $\nu_\emptyset : F\emptyset \to G\emptyset$ ebenfalls injektiv ist, es wird in den meisten Fällen nicht einmal wichtig sein, ob $\nu_\emptyset$ die Natürlichkeitsbedingung erfüllt. Formal könnte man das so ausdrücken, daß wir uns nur für natürliche Transformationen $F_{|\mathbf{Set}^*} \overset{\bullet}{\to} G_{|\mathbf{Set}^*}$ interessieren, wobei $\mathbf{Set}^*$ die volle Unterkategorie von **Set** ist, deren Objekte die nichtleeren Mengen sind. Ist F ein Unterfunktor von G mittels der injektiven natürlichen Transformation $\nu : F \overset{\bullet}{\to} G$, so können wir immer annehmen, daß folgendes gilt:

- $FA \subseteq GA$ für jede Menge A,
- ν_A ist die kanonische Einbettung $\subseteq^{GA}_{FA}$ und
- Ff ist für jede Abbildung f die Einschränkung von Gf.

Erfüllt F diese Voraussetzungen nicht, gehen wir von F zum Funktor F' über, der auf Mengen definiert ist als $F'A := \nu_A[FA] \subseteq GA$, auf Abbildungen als Einschränkung von G. Dieses so definierte F' ist natürlich isomorph zu F. Um einen Unterfunktor F von G zu definieren, reicht es also aus, für jede Menge A die Menge $FA \subseteq GA$ so zu definieren, daß $(Gf)[FA] \subseteq FB$ für jede Abbildung $f : A \to B$ gilt.

Neben Unterfunktoren werden uns auch *Quotienten* von Funktoren interessieren: Wir nennen einen Funktor G einen Quotienten eines Funktors F, wenn eine *surjektive* natürliche Transformation $\nu : F \overset{\bullet}{\twoheadrightarrow} G$ existiert, d.h., ν ist natürlich, und für $A \neq \emptyset$ ist die Komponente ν_A surjektiv. Wir schreiben dann auch $\nu : F \overset{\bullet}{\twoheadrightarrow} G$.

Für einen Funktor F muß nicht $F1 = 1$ gelten, wir können aber, V. Trnková folgend, F in eine Summe von Unterfunktoren zerlegen, die diese Eigenschaft haben:

SATZ 3.10 (Komponenten-Zerlegung [**Trn71a**]). *Ist $e \in F(1)$ gegeben, so erhalten wir einen Unterfunktor F_e von F, indem wir auf Mengen A*

$$F_e(A) := F(!_A)^-[\{e\}]$$

setzen, wobei $!_A : A \to 1$ die eindeutige Abbildung ist. Dann gilt $F = \sum_{e\in F(1)} F_e$ und $F_e(1) = 1$ für jedes $e \in F(1)$. Wir nennen diese Zerlegung die Komponentenzerlegung *von F.*

In Kapitel 4 benötigen wir Verallgemeinerungen von natürlichen Transformationen, daher definieren wir:

Definition 3.11. Ist für jede Menge A eine Abbildung $\nu_A : FA \to GA$ gegeben, so nennen wir $\nu := (\nu_A)_{A\in\mathbf{Set}}$ eine *Transformation* (zwischen F und G) und schreiben $\nu : F \to G$. Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so heißt ν *natürlich in* f, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\nu_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\nu_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ist dieses Diagramm sogar ein Pullback, so heißt ν *kartesisch in* f .

Ist $\mathcal{K}$ eine Klasse von Abbildungen, so ist ν eine *$\mathcal{K}$-natürliche Transformation*, wenn ν natürlich in allen $f \in \mathcal{K}$ ist, eine *$\mathcal{K}$-kartesische Transformation*, wenn ν kartesisch in allen $f \in \mathcal{K}$ ist.

Ist $\mathcal{K}$ die Klasse aller Abbildungen, so ist eine $\mathcal{K}$-natürliche Transformation ν schlicht eine natürliche Transformation, und ist ν zusätzlich kartesisch in jeder Abbildung, so redet man von einer *kartesischen Transformation*.

Wir werden meistens ignorieren, ob auch $\nu_\emptyset$ die Natürlichkeitsbedingung erfüllt.

Satz 3.12. *Jede injektive natürliche Transformation $\nu : F \overset{\bullet}{\to} G$ ist in allen nicht-leeren Injektionen kartesisch.*

Beweis. Sei $f : A \hookrightarrow B$ eine nicht-leere Injektion, $f^- : B \twoheadrightarrow A$ eine Linksinverse. Dann müssen wir nur Lemma 3.7 auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, hook, "Ff"] \arrow[d, hook, "\nu_A"'] & FB \arrow[r, two heads, "F(f^-)"] \arrow[d, hook, "\nu_B"'] & FA \arrow[d, hook, "\nu_A"] \\ GA \arrow[r, hook, "Gf"'] & GB \arrow[r, two heads, "G(f^-)"'] & GA \end{tikzcd}$$

anwenden. $\square$

Satz 4.15 wird zeigen, daß jede injektive natürliche Transformation sogar in allen Injektionen kartesisch ist. Es folgt, daß Unterfunktoren schon durch ihre Werte auf "großen" Mengen eindeutig bestimmt sind. Besonders intuitiv läßt sich das für einen Unterfunktor F eines Funktors G formulieren, wenn G standard ist. Denn in diesem Fall gilt

$$GU = FU \cap GA$$

für alle Mengen $\emptyset \neq U \subseteq A$, insbesondere folgt aus $FA = GA$ für eine Menge A schon, daß F und G auch auf allen nichtleeren Teilmengen von A übereinstimmen.

3. F-Homomorphismen

Viele wichtige Eigenschaften von Abbildungen lassen sich auch für F-Homomorphismen beweisen.

Lemma 3.13 ([**Rut00b**]). *Ein Homomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn er bijektiv ist. Ist $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ein Homomorphismus, $\mathcal{B}$ eine Coalgebra und sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen mit $\varphi = g \circ f$,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

dann gilt:

1. *Ist f ein surjektiver Homomorphismus, so ist g ein Homomorphismus.*
2. *Ist g ein injektiver Homomorphismus, so ist f ein Homomorphismus.*

Es folgt, daß die aus **Set** bekannten Diagrammlemmata auch in $\mathbf{Set}_F$ gelten:

LEMMA 3.14 (1. Diagrammlemma, [**Gum99**]). *Ist $\varphi : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$ ein surjektiver Homomorphismus, $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ein Homomorphismus, dann gibt es genau dann einen Homomorphismus $\chi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ mit $\chi \circ \varphi = \psi$, wenn* $\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\,\psi$ *gilt. In diesem Fall ist χ eindeutig bestimmt.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathcal{B} \arrow[d, dashed, "\chi"] \\ & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

LEMMA 3.15 (2. Diagrammlemma, [**Gum99**]). *Ist $\varphi : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$ ein injektiver Homomorphismus, $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Homomorphismus, dann gibt es genau dann einen Homomorphismus $\chi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ mit $\varphi \circ \chi = \psi$, wenn $\psi[\mathcal{C}] \subseteq \varphi[\mathcal{B}]$ gilt. In diesem Fall ist χ eindeutig bestimmt.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} & \mathcal{B} \arrow[l, hook', "\varphi"'] \\ & \mathcal{C} \arrow[ul, "\psi"] \arrow[u, dashed, "\chi"'] \end{tikzcd}$$

Jeder Homomorphismus faktorisiert eindeutig durch sein Bild, genauer:

SATZ 3.16 ([**Gum99**]). *Es gibt für jeden Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ genau eine Coalgebrenstruktur auf $\varphi[A]$, so daß $\varphi' : A \to \varphi[A]$, $a \mapsto \varphi(a)$, und $\subseteq : \varphi[A] \hookrightarrow B$, Homomorphismen sind. Die so entstehende Coalgebra $\varphi[\mathcal{A}]$ heißt das* Bild von $\mathcal{A}$ (unter φ).

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & \mathcal{B} \\ & \varphi[\mathcal{A}] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

BEMERKUNG 3.17. Aus den Diagramm-Lemmata folgt die Eindeutigkeit der Faktorisierung eines Homomorphismus in einen surjektiven und einen injektiven Homomorphismus bis auf einen vermittelnden Isomorphismus. Das bedeutet *nicht*, daß jeder Homomorphismus (bis auf Isomorphie) eindeutig epi-mono-faktorisierbar ist - dazu müßten wir nämlich wissen, daß epis in $\mathbf{Set}_F$ genau die surjektiven Homomorphismen sind (was richtig ist, wie wir in Satz 3.46 sehen werden), und daß monos genau die injektiven Homomorphismen sind - wofür wir in Beispiel 3.48 ein Gegenbeispiel sehen werden. Wir werden allerdings beweisen können (Behauptung 4.57), daß die injektiven Homomorphismen genau die *regulären monos* sind. Damit folgt dann: Jeder Homomorphismus läßt sich (bis auf Isomorphie) eindeutig in einen epi und einen regulären mono faktorisieren.

Wir werden oft vor die Aufgabe gestellt sein, für eine Abbildung $f : A \to B$ Coalgebrenstrukturen auf A und B zu finden, für die f ein F-Homomorphismus ist. Dabei werden konstante Coalgebrenstrukturen eine wichtige Rolle spielen. Wir definieren:

DEFINITION 3.18. Ist A eine Menge und $u \in FA$, so bezeichnen wir mit α_A^u die konstante Coalgebrenstruktur auf A mit Wert u, d.h.

$$\alpha_A^u := \lambda a.u : A \to FA.$$

Wir setzen weiter $\mathcal{A}^u := (A, \alpha_A^u)$.

Der Beweis des folgenden Satzes ist offensichtlich:

Satz 3.19. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung zwischen den nichtleeren Mengen A, B. Dann sind für je zwei Elemente $u \in FA$, $v \in FB$ folgende Aussagen äquivalent*

- *$(Ff)u = v$.*
- *f ist ein Homomorphismus $\mathcal{A}^u \to \mathcal{B}^v$.*

Ein erstes Beispiel für die Nützlichkeit dieser konstanten Coalgebrenstrukturen findet sich im Beweis von Satz 3.59.

4. κ-Simulationen

Der Begriff der *Bisimulation*, der aus der Theorie der Transitionssysteme stammt, ist einer der wichtigsten in der Coalgebra ([**Rut00b**]). Die intendierte Semantik ist: Zwei Elemente einer Coalgebra sind bisimilar, d.h. durch eine Bisimulation verbunden, wenn sie "ununterscheidbar" sind[1]. Wir definieren etwas allgemeiner:

Definition 3.20 (κ-Simulation, [**Gum99**]). Seien $\kappa > 0$ eine Kardinalzahl, $(\mathcal{A}_i)_{i\in\kappa}$ eine Familie von Coalgebren. Eine κ-stellige Relation $R \subseteq \prod_{i\in\kappa} A_i$ heißt *κ-Simulation* (zwischen den $\mathcal{A}_i$), wenn auf R eine Coalgebrenstruktur $\alpha_R : R \to FR$ existiert, die alle Projektionen $\pi_i : (R, \alpha_R) \to \mathcal{A}_i$, $i \in \kappa$, zu Homomorphismen macht.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, dashed, "\alpha_R"'] & A_i \arrow[d, "\alpha_i"] \\ FR \arrow[r, "F(\pi_i)"'] & FA_i \end{tikzcd}$$

Jedes solche α_R wird *κ-Simulationsstruktur* (auf R) genannt.

Ist $(\mathcal{A})_{i\in\kappa}$ eine konstante Familie, so spricht man von einer *κ-Simulation auf $\mathcal{A}$*. Im Fall $\kappa = 2$ redet man von einer *Bisimulation*, und eine Bisimulation, die gleichzeitig eine Äquivalenzrelation ist, nennt man *Bisimulationsäquivalenz*.

Der folgende Satz faßt grundlegende Aussagen über κ-Simulationen zusammen:

Satz 3.21 ([**Gum99, Rut00b**]). *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Coalgebren, κ eine Kardinalzahl, $(\mathcal{A}_i)_{i\in\kappa}$ eine Familie von Coalgebren. Dann gilt:*

(1) *Eine Abbildung ist $f : A \to B$ genau dann ein Homomorphismus, wenn* $\mathrm{Gr}\, f$, *der Graph von f, eine Bisimulation zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist (daher nennt man Coalgebrenhomomorphismen auch* funktionale Bisimulationen *).*
(2) *Ist $\mathcal{R}$ eine Coalgebra und $(\varphi_i : \mathcal{R} \to \mathcal{A}_i)_{i\in\kappa}$ eine Familie von Homomorphismen, so ist $(\varphi_i)_{i\in\kappa}[R] = \{(\varphi_i r_i)_{i\in\kappa} \mid (r_i)_{i\in\kappa} \in R\}$ eine κ-Simulation zwischen den $\mathcal{A}_i$, die* kanonische κ-Simulation *der Familie $(\varphi_i)_{i\in\kappa}$.*
(3) *Beliebige Vereinigungen von κ-Simulationen zwischen den $\mathcal{A}_i$ sind wieder κ-Simulationen. Da die leere Menge immer eine κ-Simulation ist, gibt es eine größte κ-Simulation $\sim_\kappa$ zwischen den $\mathcal{A}_i$.*
(4) *Eine Familie $(a_i \in A_i)_{i\in\kappa}$ ist genau dann Element von $\sim_\kappa$, wenn eine Coalgebra $\mathcal{C}$, eine Familie $(\varphi_i : \mathcal{C} \to \mathcal{A}_i)_{i\in\kappa}$ von Homomorphismen und ein $c \in C$ existieren mit $a_i = \varphi_i(c)$ für alle $i \in \kappa$.*

[1] Häufig wird Bisimilarität auch als *Verhaltensgleichheit* interpretiert. Da dieser Begriff aber sprachlich nahelegt, daß Bisimilarität eine Äquivalenzrelation ist, was nicht immer der Fall ist, bevorzugen wir den Begriff der Ununterscheidbarkeit.

(5) *Für jede Teilmenge $R \subseteq \prod_{i \in I} A_i$ gibt es eine größte κ-Simulation $[R]_\kappa$, die in R enthalten ist, die* von R coerzeugte κ-Simulation*:*

$$[R]_\kappa = \bigcup \{Q \mid Q \subseteq R, Q \text{ ist eine } \kappa - \text{Simulation}\}.$$

Wenn keine Verwechslungen auftreten können, schreiben wir $[R]$ statt $[R]_\kappa$.

(6) *Die κ-Simulationen zwischen den $\mathcal{A}_i$ bilden einen vollständigen Verband. Ist $(R_j)_{j \in J}$ eine Familie von κ-Simulationen zwischen den $\mathcal{A}_i$, so gilt*

$$\bigvee_{j \in J} R_j = \bigcup_{j \in J} R_j, \quad \bigwedge_{j \in J} R_j = [\bigcap_{j \in J} R_j]_\kappa.$$

(7) *Für jede Bisimulation $R \subseteq A \times B$ zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist die umgekehrte Relation $R^- := \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ eine Bisimulation zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{A}$, und da die Diagonale auf jeder Coalgebra eine Bisimulation ist, ist die größte Bisimulation auf einer Coalgebra reflexiv und symmetrisch.*

Definition 3.22. Die Familien $(a_i \in A_i)_{i \in \kappa}$, die von der größten κ-Simulation $\sim_\kappa$ zwischen den $\mathcal{A}_i$ in Relation gesetzt werden, heißen *κ-similar*. Im Falle $\kappa = 2$ redet man von *bisimilaren* Paaren. Eine κ-Simulation, bei der alle Projektionen surjektiv sind, nennt man *total*. Gibt es für eine Familie $(\mathcal{A}_i)_{i \in \kappa}$ eine totale κ-Simulation, so nennt man die Familie *κ-similar*.

Für Transitionssysteme und Automaten erhält man die schon in Kapitel 2 besprochenen Bisimulationsbegriffe, wie man leicht nachrechnet.

Die κ-Simulationsstruktur auf einer κ-Simulation R muß nicht eindeutig sein. In Satz 4.23 wird diese Frage näher untersucht.

Man kann die von einer κ-stelligen Relation R coerzeugte κ-Simulation $[R]_\kappa$ analog zur Nerode-Kongruenz auf einem Automaten berechnen, indem man mit der Relation R beginnt und nach und nach die Tupel entfernt, die nicht in Relation stehen können:

Definition 3.23 ([**Gum**]). Sei $\kappa > 0$ eine Kardinalzahl, $(\mathcal{A}_i)_{i \in \kappa}$ eine Familie von Coalgebren, $R \subseteq \prod_{i \in \kappa} A_i$ eine κ-stellige Relation. Dann definiert man eine durch Ordinalzahlen indizierte fallende Folge $(R_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Ord}}$ von Relationen zwischen den A_i wie folgt:

$$\begin{aligned} R_0 &:= R \\ R_{\lambda+1} &:= \{(a_i)_{i \in \kappa} \in R_\lambda \mid \exists v \in F(R_\lambda). \forall i < \kappa. (F\pi_i)v = \alpha_i a_i\} \\ R_\lambda &:= \bigcap_{\gamma < \lambda} R_\gamma \quad \text{für Limeszahlen } \lambda \end{aligned}$$

Wir nennen die Folge $(R_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Ord}}$ die *Coerzeugungs-Sequenz von R*. Ist $R = \prod_{i \in \kappa} A_i$, also $[R]_\kappa = \sim_\kappa$, so nennen wir R_λ auch die Relation der *λ-κ-Similarität* und $(R_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Ord}}$ die *κ-Sequenz.*

Mit diesen Notationen gilt:

Satz 3.24. 1. *Für eine Ordinalzahl λ gilt genau dann $R_\lambda = R_{\lambda+1}$, wenn R_λ eine κ-Simulation ist. In diesem Fall gilt $R_{\lambda'} = R_\lambda$ für jede Ordinalzahl $\lambda' \geq \lambda$.*

2. *Für alle Ordinalzahlen λ gilt $[R]_\kappa \subseteq R_\lambda \subseteq R$, und es gibt eine Ordinalzahl λ_0 mit $[R]_\kappa = R_{\lambda_0}$. Wir sagen dann, daß $(R_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Ord}}$ in λ_0* Schritten konvergiert.

Beweis. Wenn $R_\lambda = R_{\lambda+1}$ für eine Ordinalzahl λ gilt, so ist R_λ sicherlich eine κ-Simulation. Umgekehrt gilt: Wenn wir für ein λ bewiesen haben, daß $[R]_\kappa \subseteq R_\lambda$ gilt, so gilt auch $[R]_\kappa \subseteq R_{\lambda+1}$, denn für jede Familie $(a_i)_{i<\kappa} \in [R]_\kappa$ gibt es ein

$w \in F([R]_\kappa)$, das $(F\pi_i)(a_i)_{i<\kappa} = \alpha_i a_i$ für alle $i < \kappa$ erfüllt. Setzt man dann $w' := F(\subseteq^{R_\lambda}_{[R]_\kappa})w \in F(R_\lambda)$, so gilt $(F\pi_i)w' = \alpha_i a_i$ für alle $i < \kappa$, also $(a_i)_{i<\kappa} \in R_{\lambda+1}$.

Daß eine Ordinalzahl λ_0 mit $[R]_\kappa = R_{\lambda_0}$ existiert, folgt daraus, daß jede Menge nur eine Menge von Teilmengen besitzt. $\square$

In Kapitel 5 werden wir untersuchen, wie schnell die κ-Sequenz konvergiert. Die hier gemachte Definition ist eine Verallgemeinerung der von James Worrell in [**Wor99a**] gegebenen.

5. Untercoalgebren und Nachfolgermengen

Definition 3.25 ([**Rut00b, Gum99**]). Sei $\mathcal{A}$ eine Coalgebra. Eine Teilmenge $U \subseteq A$ ist *abgeschlossen*, wenn eine Coalgebrenstruktur α_U auf U existiert, die die Einbettung $\subseteq^A_U\colon (U, \alpha_U) \hookrightarrow \mathcal{A}$ zum Homomorphismus macht. $\mathcal{U} = (U, \alpha_U)$ ist dann eine *Untercoalgebra* von $\mathcal{A}$, und wir schreiben $\mathcal{U} \leq \mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "\subseteq^A_U"] \arrow[d, dashed, "\alpha_U"'] & A \arrow[d, "\alpha_A"] \\ FU \arrow[r, hook, "F(\subseteq^A_U)"'] & FA \end{tikzcd}$$

Abgeschlossene Mengen sind also nichts anderes als 1-Simulationen. Die Coalgebrenstruktur $\alpha_U : U \to FU$, die eine abgeschlossene Menge zur Untercoalgebra macht, ist eindeutig bestimmt, so daß wir im folgenden abgeschlossene Mengen und Untercoalgebren identifizieren. Aus Satz 3.21.(1) folgt, daß für eine Coalgebra $\mathcal{A}$ eine Teilmenge $U \subseteq A$ genau dann eine Untercoalgebra ist, wenn $\Delta_U = \{(u, u) \in A \times A \mid u \in U\}$ eine Bisimulation auf $\mathcal{A}$ ist.

Beispiel 3.26 (Transitionssysteme): Ist $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{P}$-Coalgebra, so ist eine Teilmenge $U \subseteq A$ genau dann eine Untercoalgebra, wenn sie gegen ausgehende Transitionen abgeschlossen ist, d.h., wenn für jedes $u \in U$ und jedes $a \in A$ aus $u \to_A a$ folgt, daß $a \in U$ ist.

Beispiel 3.27 (Automaten): Sind C und M Mengen und ist $\mathcal{A}$ eine $C \times (-)^M$-Coalgebra, so ist eine Teilmenge $U \subseteq A$ genau dann eine Untercoalgebra, wenn sie gegen ausgehende Transitionen abgeschlossen ist, d.h., wenn für jedes $u \in U$ und jedes $m \in M$ auch $\delta(u, m) \in U$ ist.

Man kann die Eigenschaft, daß eine Teilmenge abgeschlossen ist, elementweise ausdrücken:

Lemma 3.28 ([**Gum99**]). *Sei $\mathcal{A}$ eine Coalgebra. Dann ist $U \subseteq A$ genau dann abgeschlossen, wenn $\alpha_A u \in F(\subseteq^A_U)[FU]$ für jedes $u \in U$ gilt.*

Ist F standard, so bedeutet die Bedingung des Lemmas

$$u \in U \Rightarrow \alpha_A u \in FU.$$

Für eine $\mathcal{P}$-Coalgebra $\mathcal{A}$ ist eine Teilmenge $U \subseteq A$ also genau dann abgeschlossen, wenn $\alpha_A u \subseteq U$ für jedes $u \in U$ gilt, anders gesagt, wenn U mit dem Zustand u auch alle Nachfolger von u enthält. Motiviert von diesem Beispiel definieren wir:

Definition 3.29. Seien $A \in \mathbf{Set}$, $u \in FA$. Der *F-Filter von* (A, u) ist die Menge

$$\mathfrak{F}(A, u) := \{U \subseteq A \mid u \in F(\subseteq^A_U)[FU]\}.$$

Ist $(A, \alpha_A) \in \mathbf{Set}_F$ eine Coalgebra und $a \in A$ ein Zustand, so heißt $U \subseteq A$ *Nachfolgermenge von a*, wenn $U \in \mathfrak{F}(A, \alpha_A a)$ gilt.

In [**Trn71a**] wird ebenfalls $\mathfrak{F}(A,u)$ definiert, dort werden allerdings nur die (A,u) betrachtet, für die $\mathfrak{F}(A,u) \neq \mathcal{P}(A)$ gilt.

Offensichtlich gilt für jede Menge A und jedes $u \in FA$, daß $\mathfrak{F}(A,u) \cup \{\emptyset\}$ gerade die Menge der Untercoalgebren der konstanten Coalgebra $\mathcal{A}^u$ (s. Definition 3.18) ist.

Satz 3.30. *Für jedes $A \in \mathbf{Set}$ und jedes $u \in FA$ ist $\mathfrak{F}(A,u)$ ein Filter (wobei der triviale Filter $\mathcal{P}(A)$ zugelassen ist).*

Beweis. $\mathfrak{F}(A,u)$ ist offensichtlich gegen Obermengen abgeschlossen. $\mathfrak{F}(A,u)$ ist gegen endliche Schnitte abgeschlossen, da F endliche Schnitte erhält. □

Mit dem Begriff der Nachfolgermenge läßt sich Lemma 3.28 so umformulieren:

Satz 3.31. *Seien $\mathcal{A} = (A, \alpha_A) \in \mathbf{Set}_F$ eine Coalgebra, $U \subseteq A$ eine Teilmenge. Dann ist U genau dann eine Untercoalgebra, wenn U Nachfolgermenge jedes $u \in U$ ist.*

Da Untercoalgebren 1-Simulationen sind, sind sie gegen Vereinigungen abgeschlossen. Es gilt aber auch:

Satz 3.32. *Sind U, V zwei Untercoalgebren der Coalgebra $\mathcal{A}$, dann ist auch $U \cap V$ eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$. Also bilden die Untercoalgebren einer Coalgebra $\mathcal{A}$ eine Topologie auf A.*

Beweis. Das folgt sofort aus den Sätzen 3.30 und 3.31. □

6. Kongruenzen

In [**AM89**] wurde der Begriff der *Kongruenz* auf einer Coalgebra eingeführt. Später ([**Rut00b**]) wurde dieser Begriff von dem der *Bisimulationsäquivalenz* verdrängt. Im Kontext von [**Rut00b**] stimmen diese Begriffe überein, da in [**Rut00b**] nur Funktoren betrachtet werden, die schwache Pullbacks erhalten. Im Zuge der Untersuchung allgemeinerer Funktoren wurden Kongruenzen in [**GS01d**] wieder näher untersucht.

Definition 3.33 (homomorphes Bild, Kongruenz). Eine Coalgebra $\mathcal{B}$ ist *homomorphes Bild* der Coalgebra $\mathcal{A}$, wenn ein surjektiver Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$ existiert. Eine Äquivalenzrelation $R \subseteq A \times A$ ist eine *Kongruenz* auf $\mathcal{A}$, wenn R der Kern eines Homomorphismus mit Definitionsbereich $\mathcal{A}$ ist. Die Menge aller Kongruenzen auf $\mathcal{A}$ wird mit $\mathrm{Con}(\mathcal{A})$ bezeichnet. Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt *Präkongruenz*, wenn die von R erzeugte Äquivalenzrelation $\mathrm{Eq}(R)$ eine Kongruenz ist.

Lemma 3.34 ([**Gum99**]). *Für eine Coalgebra $\mathcal{A}$ und eine Äquivalenzrelation R auf A sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *R ist eine Kongruenz auf $\mathcal{A}$.*
2. *Es gibt (genau) eine Coalgebrenstruktur α_R auf A/R, für die die kanonische Projektion $\pi_R : \mathcal{A} \to (A/R, \alpha_R)$ ein Homomorphismus ist.*
3. *Es gilt $R \subseteq \mathrm{Ker}(F(\pi_R) \circ \alpha_A)$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\pi_R"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & A/R \arrow[d, dashed, "\alpha_R"] \\ FA \arrow[r, two heads, "F\pi_R"'] & F(A/R) \end{tikzcd}$$

A/R, versehen mit der kanonischen Transitionsstruktur des Lemmas, bezeichnen wir mit $\mathcal{A}/R$, die Transitionsstruktur mit α_R. Wir nennen $\mathcal{A}/R$ einen *Faktor von $\mathcal{A}$* und bezeichnen den Projektionshomomorphismus mit $\pi_R : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/R$.

Beispiel 3.35: Auf jeder Coalgebra $\mathcal{A}$ ist die Diagonale Δ_A die kleinste Kongruenz.

Beispiel 3.36: Auf einer konstanten Coalgebra (s. Definition 3.18) ist jede Äquivalenzrelation eine Kongruenz.

Beispiel 3.37 (Transitionssysteme): Eine Äquivalenzrelation R auf einer $\mathcal{P}$-Coalgebra $\mathcal{A}$ ist genau dann eine Kongruenz, wenn es für alle $(a_1, a_2) \in R$ und jeden Nachfolger a_1' von a_1 ein $a_2' \in A$ mit $a_2 \to a_2'$ und $(a_1', a_2') \in R$ gibt. - In diesem Fall gibt es, da R symmetrisch ist, auch für jeden Nachfolger a_2' von a_2 einen Nachfolger a_1' von a_1 mit $(a_1', a_1) \in R$.

Beispiel 3.38 (Automaten): Seien C und M Mengen. Eine Äquivalenzrelation R auf einer $C \times (-)^M$-Coalgebra $\mathcal{A} = (A, \delta_A, o_A)$ ist genau dann eine Kongruenz, wenn für alle $(a_1, a_2) \in R$ gilt:

- $o_A(a_1) = o_A(a_2)$ und
- für jedes $m \in M$ gilt $(\delta_A(a_1, m), \delta_A(a_2, m)) \in R$.

Für Transitionssysteme und Automaten stimmen also die Begriffe von Kongruenz und Bisimulationsäquivalenz überein. In Behauptung 3.44 und Hauptsatz 4.61 werden wir die Funktoren charakterisieren, für deren Coalgebren dies der Fall ist. Zunächst aber einige Aussagen über Kongruenzen. Lemma 3.14 zeigt:

Lemma 3.39 ([**Gum99**]). *Sind R, Q Kongruenzen auf der Coalgebra $\mathcal{A}$, so gilt genau dann $R \subseteq Q$, wenn es (genau) einen Homomorphismus $\pi_{R/Q} : \mathcal{A}/R \twoheadrightarrow \mathcal{A}/Q$ mit $\pi_{R/Q} \circ \pi_R = \pi_Q$ gibt. In diesem Fall ist $\pi_{R/Q}$ surjektiv.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, two heads, "\pi_R"] \arrow[dr, "\pi_Q"'] & \mathcal{A}/R \arrow[d, dashed, "\pi_{R/Q}"] \\ & \mathcal{A}/Q \end{tikzcd}$$

Satz 3.40 (Homomorphiesatz [**Gum99**]). *Für jeden Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist $\mathcal{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ isomorph zu $\varphi[\mathcal{A}]$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "\pi_{\operatorname{Ker}\varphi}"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{A}/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[r, "\simeq"] & \varphi[\mathcal{A}] \arrow[u, hook, "\leq"'] \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist jedes homomorphe Bild von $\mathcal{A}$ isomorph zu einem Faktor von $\mathcal{A}$.

Kongruenzen lassen sich auf Untercoalgebren einschränken und von Untercoalgebren fortsetzen:

Behauptung 3.41. *Für jede Kongruenz R auf $\mathcal{A}$ und jede Untercoalgebra $\mathcal{U}$ von $\mathcal{A}$ ist $R \cap (U \times U)$ eine Kongruenz auf $\mathcal{U}$. Ist umgekehrt R eine Kongruenz auf $\mathcal{U}$, so ist $R \cup \Delta_A$ eine Kongruenz auf $\mathcal{A}$.*

Beweis. Der erste Teil folgt sofort daraus, daß $R \cap (U \times U) = \operatorname{Ker}(\pi_R \circ \subseteq_U^A)$ gilt. Zum Beweis des zweiten Teils muß man nur folgenden Pushout (in **Set** oder in $\mathbf{Set}_F$) betrachten:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\pi_{R'}"] & A/R' \\ U \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\pi_R"'] & U/R \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Man sieht leicht, daß $R' = R \cup \Delta_A$ gilt, wenn man beachtet, daß in **Set** (und nach Satz 3.1 auch in $\mathbf{Set}_F$) Pushouts von injektiven Abbildungen injektiv und Pushouts von surjektiven Abbildungen surjektiv sind (s. z.B. [**Lan71**]). $\square$

Die Kongruenzen auf einer Coalgebra bilden einen vollständigen Verband:

Behauptung 3.42 ([**Gum99**]). *Für jede reflexive Relation $R \subseteq A \times A$ auf $\mathcal{A}$ gibt es eine größte Kongruenz auf $\mathcal{A}$, die in R enthalten ist. Die Menge* $\mathrm{Con}(\mathcal{A})$ *aller Kongruenzen auf $\mathcal{A}$, geordnet durch die mengentheoretische Inklusion, ist ein vollständiger Verband, wobei für eine Familie $(R_i)_{i\in I}$ von Kongruenzen auf $\mathcal{A}$*

$$\bigvee_{i\in I} R_i = \mathrm{Eq}(\bigcup_{i\in I} R_i),$$

gilt. Also gibt es eine größte Kongruenz auf $\mathcal{A}$, die wir mit $\nabla_{\mathcal{A}}$ bezeichnen.

Wir betrachten noch den Fall, daß $\mathcal{A}$ eine Coalgebra eines Produktes mehrerer Funktoren ist:

Satz 3.43. *Sei $(F_i)_{i\in I}$ eine Familie von Funktoren, $\mathcal{A} = (A, \alpha_A : A \to \prod_{i\in I} F_i A)$ eine Coalgebra des Produktfunktors $\prod_{i\in I} F_i$ Dann ist eine Äquivalenzrelation $R \subseteq A \times A$ genau dann eine $(\prod_{i\in I} F_i)$-Kongruenz, wenn sie für jedes $i \in I$ eine F_i-Kongruenz auf der Coalgebra $(A, \alpha_i := \pi_i \circ \alpha_A : A \to FA_i)$ ist, wobei $\pi_i : \prod_{i\in I} F_i A \to F_i A$ die kanonische Projektion ist.*

Beweis. Daß R eine $\prod_{i\in I} F_i$-Kongruenz ist, ist äquivalent dazu, daß wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_R"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & A/R \arrow[d, dashed] \\ \prod_{i\in I} FA_i \arrow[r, "\prod_{i\in I} F_i(\pi_R)"'] & \prod_{i\in I} F_i(A/R) \end{tikzcd}$$

kommutativ ergänzen können. Dies ist aber über die universelle Eigenschaft des Produktes in der Kategorie **Set** äquivalent dazu, daß wir für jedes i das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_R"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & A/R \arrow[d, dashed] \\ F_i A \arrow[r, "F_i(\pi_R)"'] & F_i(A/R) \end{tikzcd}$$

kommutativ ergänzen können, also dazu, daß R für jedes i eine F_i-Kongruenz auf (A, α_i) ist. □

Ein erster Zusammenhang zwischen Bisimulationen und Kongruenzen ist:

Behauptung 3.44 ([**AM89**]). *Jede Bisimulation auf einer Coalgebra ist eine Präkongruenz. Insbesondere ist jede Bisimulationsäquivalenz auf einer Coalgebra eine Kongruenz.*

Beweis. Wir führen einen etwas einfacheren Beweis als den in [**AM89**] angegebenen: Sei R eine Bisimulation auf einer Coalgebra $\mathcal{A}$. Dann sind die kanonischen Projektionen $\pi_1, \pi_2 : R \to A$ bzgl. einer geeigneten Coalgebrenstruktur auf R Homomorphismen. Der Coequalizer von π_1, π_2 ist gerade der Faktor von $\mathcal{A}$ nach der von R erzeugten Äquivalenzrelation $\mathrm{Eq}(R)$, was zeigt, daß $\mathrm{Eq}(R)$ eine Kongruenz, folglich R eine Präkongruenz ist.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & A \arrow[r, two heads, "\psi"] & A/\,\mathrm{Eq}(R) \end{tikzcd}$$

□

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht, wie man an folgendem “klassischen” Beispiel aus [**AM89**] (s. auch [**GS01d**]) sieht:

Beispiel 3.45: Wir betrachten den Funktor $(-)^3_2$ aus Beispiel 3.3. Die $(-)^3_2$-Coalgebra $\mathcal{A}$ habe die Grundmenge $A := \{a, b\}$ und die Transitionsstruktur $\alpha_A a := (a, a, b)$, $\alpha_A b := (a, b, b)$. Dann ist $A \times A$ eine Kongruenz auf $\mathcal{A}$, aber keine Bisimulation. Es gilt sogar: Die größte Bisimulation auf $\mathcal{A}$ ist Δ_A.

7. Epis und monos in $\mathbf{Set}_F$

Während in **Set** die epis genau die surjektiven Abbildungen und die monos genau die injektiven Abbildungen sind, ist die Sache in $\mathbf{Set}_F$ nicht so einfach. Es gilt:

SATZ 3.46 ([**Rut00b**]). *Für jeden Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ gilt:*

- *φ ist genau dann epi in $\mathbf{Set}_F$, wenn φ surjektiv ist.*
- *φ ist mono in $\mathbf{Set}_F$, wenn φ injektiv ist.*

Homomorphismen, die mono sind, lassen sich wie folgt charakterisieren:

SATZ 3.47 ([**GS01d**]). *Ein Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist genau dann mono, wenn $[\mathrm{Ker}\,\varphi]_2 = \Delta_A$ gilt, wenn also die von $\mathrm{Ker}\,\varphi$ coerzeugte Bisimulation die Diagonale ist.*

BEWEIS. Sei $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mono und seien $\pi_1, \pi_2 : [\mathrm{Ker}\,\varphi]_2 \to \mathcal{A}$ die kanonischen Projektionen. Es gilt $\varphi \circ \pi_1 = \varphi \circ \pi_2$, also nach Voraussetzung $\pi_1 = \pi_2$, was $[\mathrm{Ker}\,\varphi]_2 = \Delta_A$ zeigt.

Umgekehrt sei $[\mathrm{Ker}\,\varphi]_2 = \Delta_A$ und seien $\psi_1, \psi_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ Homomorphismen mit $\varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2$. Dann ist nach Satz 3.21.(2) die Menge $(\psi_1, \psi_2)[C]$ eine Bisimulation auf $\mathcal{A}$, und es gilt $(\psi_1, \psi_2)[C] \subseteq [\mathrm{Ker}\,\varphi]_2 = \Delta_A$, was $\psi_1 = \psi_2$ zeigt, also nachweist, daß φ mono ist.

$$\begin{tikzcd} {[\mathrm{Ker}\,\varphi]_2} \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & \mathcal{A} \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{B} \\ & \mathcal{C} \arrow[u, shift left, "\psi_1"] \arrow[u, shift right, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

□

Beispiel 3.48 ([**GS00**]): Der Funktor $(-)^3_2$ liefert ein Beispiel für einen nicht injektiven mono. Mit den Notationen von Beispiel 3.45 gilt: Ist $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\nabla_A$ der eindeutige Homomorphismus, so ist π mono, aber offensichtlich nicht injektiv.

Wir werden die Fragestellung, wann jeder mono in $\mathbf{Set}_F$ injektiv ist, in Abschnitt 4.9 noch einmal aufgreifen.

8. Einfache und extensionale Coalgebren

Wir haben in Kapitel 2 gesehen, daß Automaten und Transitionssysteme, auf denen die größte Bisimulation die Diagonale ist, coinduktive Beweise erlauben.

DEFINITION 3.49 ([**GS01d**]). Eine Coalgebra $\mathcal{A}$ heißt

einfach: wenn $\mathrm{Con}(\mathcal{A}) = \{\Delta_A\}$ gilt;
extensional: wenn Δ_A die größte Bisimulation auf $\mathcal{A}$ ist.

KOROLLAR 3.50 ([**Gum99**]). *Jede einfache Coalgebra ist extensional. Für jede Coalgebra $\mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}/\nabla_\mathcal{A}$, die Faktorisierung von $\mathcal{A}$ nach der größten Kongruenz $\nabla_\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}$, einfach.*

Rutten ([**Rut00b**]) nennt eine Coalgebra $\mathcal{A}$ einfach, wenn Δ_A die größte Bisimulation auf $\mathcal{A}$ ist, d.h., wenn sie in unserem Sinne extensional ist. In dem von Rutten betrachteten Rahmen stimmen die beiden Begriffe überein, da er sich nur für Funktoren F interessiert, die schwache Pullbacks erhalten (s. Abschnitt 4.10). Die hier gewählte Begrifflichkeit hat den Vorzug, daß sie klarer zum Ausdruck bringt, daß extensionale Coalgebren folgendes *Extensionalitätsprinzip* erfüllen:

$$x \sim y \Rightarrow x = y.$$

Wenn man Bisimilarität als *Ununterscheidbarkeit unter Observationen* versteht, kann man das Extensionalitätsprinzip wie folgt formulieren: Zwei Elemente, die sich nicht unterscheiden lassen, sind gleich. Man erhält noch folgende Charakterisierungen:

Lemma 3.51. *Für jede Coalgebra $\mathcal{A}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *$\mathcal{A}$ ist extensional.*
- *Jeder Homomorphismus mit Definitionsbereich $\mathcal{A}$ ist mono.*
- *Für jede Coalgebra $\mathcal{B}$ gibt es höchstens einen Homomorphismus $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$.*

Weiterhin sind für $\mathcal{A}$ folgende Aussagen äquivalent:

- *$\mathcal{A}$ ist einfach.*
- *Jeder Homomorphismus mit Definitionsbereich $\mathcal{A}$ ist injektiv.*

Beweis. Die ersten drei Äquivalenzen stammen aus [**Gum99**], für den zweiten Teil muß man nur bemerken, daß die Kongruenzen auf $\mathcal{A}$ genau die Kerne von Homomorphismen mit Definitionsbereich $\mathcal{A}$ sind und ein Homomorphismus genau dann injektiv ist, wenn sein Kern die Diagonale ist. □

9. Terminale und cofreie Coalgebren

Definition 3.52. Eine *terminale* (oder *finale*) F-Coalgebra ist ein terminales Objekt von $\mathbf{Set}_F$, also eine F-Coalgebra $\mathcal{T}$, für die für jede F-Coalgebra $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ genau ein F-Homomorphismus $!_\mathcal{A} : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ existiert. Eine *schwach terminale* Coalgebra ist eine Coalgebra $\mathcal{S}$, für die für jede Coalgebra $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ mindestens ein Homomorphismus $\mathcal{A} \to \mathcal{S}$ existiert.

Sei C eine Menge. Eine *cofreie F-Coalgebra über der Farbmenge C* ist ein Paar $((\mathfrak{T}(C), \alpha_C), \varepsilon_C)$, bestehend aus einer F-Coalgebra $(\mathfrak{T}(C), \alpha_C)$ und einer Abbildung $\varepsilon_C : \mathfrak{T}(C) \to C$, das folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für jede F-Coalgebra $\mathcal{A}$ und jede Abbildung (*Färbung*) $\varphi : A \to C$ gibt es genau einen F-Homomorphismus $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \to \mathfrak{T}(C)$ mit $\varepsilon_C \circ \tilde{\varphi} = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
 & C \\
A \arrow[ur, "\forall\varphi"] \arrow[r, dashed, "\exists!\tilde{\varphi}"'] \arrow[d, "\alpha_A"'] & \mathfrak{T}(C) \arrow[u, "\varepsilon_C"'] \arrow[d, "\alpha_C"] \\
FA \arrow[r, dashed, "F(\tilde{\varphi})"'] & F(\mathfrak{T}(C))
\end{tikzcd}$$

Wenn in $\mathbf{Set}_F$ für jede Farbmenge C eine cofreie Coalgebra über C existiert, nennen wir F - J. Adámek und H. Porst ([**AP01**]) folgend - einen *Covarietor*.

Die Definition des Homomorphismus $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \to \mathfrak{T}(C)$ aus der Abbildung $\varphi : A \to C$ nennt man auch *coinduktive* oder *corekursive* oder *coiterative* Definition. In Kapitel 2 haben wir schon eine Anwendung dieses Prinzips gesehen, man vergleiche die Arbeiten von Rutten [**Rut00b, Rut00a**] bzw. Rutten und Jacobs [**JR97**] für weitergehende Anwendungen von Coinduktion.

$((\mathfrak{T}(C), \alpha_C), \varepsilon_C)$ ist genau dann eine cofreie F-Coalgebra, wenn $(\mathfrak{T}(C), (\varepsilon_C, \alpha_C))$ eine terminale $C \times F$-Coalgebra ist. Weiterhin gilt:

BEHAUPTUNG 3.53 ([**GS01a**]). *Ist $\mathcal{S} \in \mathbf{Set}_F$ schwach terminal, so ist $\mathcal{S}/\nabla_{\mathcal{S}}$ terminal. Also existiert in $\mathbf{Set}_F$ genau dann eine schwach terminale Coalgebra, wenn eine terminale Coalgebra existiert, und eine Coalgebra ist genau dann schwach terminal, wenn sie Retrakt der terminalen Coalgebra ist.*

Ein Beispiel für eine terminale Coalgebra ist der terminale Automat aus Kapitel 2:

Beispiel 3.54 ([**Rut00b, GS01a**]): Seien C, M nicht-leere Mengen. Dann ist für den Funktor $C \times (-)^M$ eine terminale Coalgebra wie folgt gegeben: Die Grundmenge ist die Menge C^{M^*}, wobei M^* die Menge der endlichen Folgen über M ist. Die Transitionsstruktur ist gegeben durch

$$\alpha_C : C^{M^*} \to C \times (C^{M^*})^M,\ \varphi \mapsto (\varphi(\epsilon), \lambda m.\lambda w.\varphi(m \cdot w)),$$

wobei ϵ die leere Folge bezeichnet und $m \cdot w$ die Konkatenation des Zeichens m mit der endlichen Folge w. In Automatenschreibweise bedeutet das (mit den Notationen aus Beispiel 3.2): Die Ausgabefunktion des terminalen Automaten ist

$$o_C : C^{M^*} \to C, \varphi \mapsto \varphi(\epsilon)),$$

die Transitionsfunktion ist

$$\delta_C : C^{M^*} \times M \to C^{M^*},\ \delta_C(\varphi, m)(w) := \varphi(m \cdot w).$$

Für eine $C \times (-)^M$-Coalgebra $\mathcal{A} = (A, \alpha_A) = (A, o_A, \delta_A)$ ist der eindeutige $C \times (-)^M$-Homomorphismus $!_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C^{M^*}$ gegeben durch

$$!_{\mathcal{A}}(a)(w) = o_A(\delta_A^*(a, w)).$$

Eine wichtige Eigenschaft der terminalen Coalgebra beschreibt folgender Satz:

SATZ 3.55 ([**Gum99**]). *Wenn eine terminale Coalgebra $\mathcal{S}$ existiert, so gibt es für jede Coalgebra $\mathcal{A}$ und jedes $a \in A$ genau ein Element in $\mathcal{S}$, das zu a bisimilar ist. Weiterhin ist eine Coalgebra genau dann einfach, wenn sie isomorph zu einer Untercoalgebra von $\mathcal{S}$ ist.*

Dieser Satz impliziert nicht, daß zwei Zustände einer F-Coalgebra $\mathcal{A}$ genau dann bisimilar sind, wenn sie vom eindeutigen Homomorphismus $!_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ auf dasselbe Element abgebildet werden, denn um dies zu beweisen, müßte man wissen, daß Bisimilarität eine transitive Relation ist, was nicht richtig sein muß (genauer werden wir dies in Kapitel 4 untersuchen). Der Kern von $!_{\mathcal{A}}$ ist die größte Kongruenz $\nabla_{\mathcal{A}}$ auf $\mathcal{A}$, und diese muß nicht mit der größten Bisimulation $\sim_{\mathcal{A}}$ auf $\mathcal{A}$ übereinstimmen.

Eine Möglichkeit, nachzuweisen, daß für einen Funktor F *keine* terminale Coalgebra existiert, ergibt sich aus folgender Aussage:

SATZ 3.56 ([**Lam68**]). *Ist $\mathcal{T} = (T, \alpha_T)$ eine terminale Coalgebra, so ist $\alpha_T : T \to FT$ bijektiv, d.h., die Zustandsmenge der terminalen Coalgebra ist ein Fixpunkt von F.*

Beispiel 3.57: Der Potenzmengenfunktor $\mathcal{P}$ hat keinen Fixpunkt, also gibt es kein terminales Transitionssystem.

Satz 3.56 läßt sich nicht umkehren, es gibt Funktoren, die einen Fixpunkt besitzen, aber keine terminale Coalgebra, wie in [**AK95**] bewiesen wurde. Das steht im Gegensatz zur Situation bei initialen Algebren, denn für jeden **Set**-Endofunktor F gilt (Adámek und Koubek [**AK79**]): Wenn F Injektionen erhält (was man immer annehmen kann), dann gibt es genau dann eine initiale F-Algebra, wenn F einen Fixpunkt hat.

Die Bildung cofreier Coalgebren ist funktoriell: Ist F ein Covarietor, so erhält man einen Funktor $\mathfrak{T} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}_F$, der jeder Menge C die cofreie F-Coalgebra $\mathfrak{T}(C)$ über der Farbmenge C zuordnet, jeder Abbildung $f : A \to B$ den eindeutigen

F-Homomorphismus $\mathfrak{T}(f) : \mathfrak{T}(A) \to \mathfrak{T}(B)$, der folgendes Diagramm kommutieren läßt:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ \mathfrak{T}(A) \arrow[u, "\varepsilon_A"] \arrow[r, dashed, "\mathfrak{T}(f)"'] & \mathfrak{T}(B) \arrow[u, "\varepsilon_B"'] \end{tikzcd}$$

Dieser Funktor $\mathfrak{T}$ ist rechtsadjungiert zum Vergißfunktor $U : \mathbf{Set}_F \to \mathbf{Set}$, er ist das Bindeglied zwischen der Theorie der Coalgebren und den aus der Kategorientheorie bekannten *Comonaden* (s. z.B. [**AHS90**]): Wir erhalten nämlich einen neuen $\mathbf{Set}$-Endofunktor $T := U \circ \mathfrak{T} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, eine natürliche Transformation $\varepsilon = (\varepsilon_C : TC \to C)_{C \in \mathbf{Set}} : T \stackrel{\bullet}{\to} \mathcal{I}$ und eine weitere natürliche Transformation $\nu : T \stackrel{\bullet}{\to} T \circ T$, indem wir für jede Menge A

$$\nu_A := \widetilde{\mathrm{id}_{\mathfrak{T}(A)}} : T(A) \to T(T(A))$$

setzen. Damit ist (T, ε, ν) eine Comonade, und es ist leicht zu sehen, daß die Eilenberg-Moore-Kategorie von T isomorph zu $\mathbf{Set}_F$ ist.

10. Natürliche Transformationen

Jede Transformation (s. Definition 3.11) $\nu : F \to G$ induziert eine Objekt-Abbildung $\nu \circ (-)$ von $\mathbf{Set}_F$ in $\mathbf{Set}_G$, die jeder F-Coalgebra $\mathcal{A}$ die G-Coalgebra $\nu(\mathcal{A}) := (A, \nu_A \circ \alpha_A)$ zuordnet. Ist ν natürlich, so gilt sogar:

Satz 3.58 ([**Rut00b**]). *Jede natürliche Transformation $\nu : F \stackrel{\bullet}{\to} G$ induziert einen Funktor $\nu \circ (-) : \mathbf{Set}_F \to \mathbf{Set}_G$, der jede F-Coalgebra (A, α_A) auf die G-Coalgebra $(A, \nu_A \circ \alpha_A)$ abbildet und auf F-Homomorphismen die Identität ist. Dieser Funktor $\nu \circ (-) : \mathbf{Set}_F \to \mathbf{Set}_G$ erhält alle Colimites.*

Eine natürliche Transformation $\nu : F \stackrel{\bullet}{\to} G$ bietet also die Möglichkeit, die Kategorien $\mathbf{Set}_F$ und $\mathbf{Set}_G$ zu vergleichen. Ist F ein Unterfunktor von G, dann ist jeder G-Homomorphismus zwischen zwei transformierten F-Coalgebren schon ein F-Homomorphismus, genauer:

Satz 3.59. *Sei $\nu : F \stackrel{\bullet}{\to} G$ eine natürliche Transformation, $B \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge. Dann sind für jede F-Coalgebra $\mathcal{B}$ folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$\nu_B : FB \to GB$ ist injektiv.*
2. *Für jede F-Coalgebra $\mathcal{A}$ ist jeder G-Homomorphismus $\varphi : (A, \nu_A \circ \alpha_A) \to (B, \nu_B \circ \alpha_B)$ auch ein F-Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.*
3. *Sind α_B und α'_B zwei F-Coalgebrenstrukturen auf B, für die $\mathrm{id}_B : (B, \nu_B \circ \alpha_B) \to (B, \nu_B \circ \alpha'_B)$ ein G-Homomorphismus ist, so gilt $\alpha_B = \alpha'_B$.*

Beweis. (1)$\Rightarrow$(2): Seien ν_B injektiv, $f : (A, \nu_A \circ \alpha_A) \to (B, \nu_B \circ \alpha_B)$ ein G-Homomorphismus. Dann kommutieren im Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & B \arrow[d, "\alpha_B"] \\ FA \arrow[r, "F\varphi"] \arrow[d, "\nu_A"'] & FB \arrow[d, hook, "\nu_B"] \\ GA \arrow[r, "G\varphi"'] & GB \end{tikzcd}$$

das äußere Rechteck und das untere Quadrat. Aus der Injektivität von ν_B folgt die Kommutativität des oberen Quadrates.

(2)⇒(3) ist offensichtlich. (3)⇒(1): Seien $u, u' \in FB$ mit $\nu_B(u) = \nu_B(u')$ gegeben. Dann betrachten wir die konstanten F-Coalgebren (B, α_B^u) und $(B, \alpha_B^{u'})$ (s. Definition 3.18). Es gilt $\nu_B \circ \alpha_B^u = \nu_B \circ \alpha_B^{u'}$, folglich ist

$$\mathrm{id}_B : (B, \nu_B \circ {\alpha_B}^{u'}) \to (B, \nu_B \circ {\alpha_B}^u)$$

ein G-Homomorphismus. Nach Voraussetzung ist dann $\mathrm{id}_B : (B, {\alpha_B}^{u'}) \to (B, {\alpha_B}^u)$ ein F-Homomorphismus. Satz 3.19 zeigt $F(\mathrm{id}_B)u = u'$, also $u = u'$. □

Kongruenzen sind kompatibel mit Unterfunktoren, genauer:

SATZ 3.60. *Sei F ein Unterfunktor von G. Dann gilt für jede F-Coalgebra $(A, \alpha_A) \in \mathbf{Set}_F$: Eine Äquivalenzrelation $R \subseteq A \times A$ auf A ist genau dann eine F-Kongruenz auf (A, α_A), wenn sie eine G-Kongruenz auf $(A, \subseteq_{FA}^{GA} \circ \alpha_A)$ ist.*

BEWEIS. Daß R eine F-Kongruenz ist, ist nach Lemma 3.34 äquivalent zu $R \subseteq \mathrm{Ker}(F\pi_R \circ \alpha_A)$, wobei $\pi_R : A \to A/R$ die kanonische Projektion ist. Das ist aber wegen $\mathrm{Ker}(G(\pi_R) \circ \subseteq_{FA}^{GA}) = \mathrm{Ker}\, F(\pi_R)$ äquivalent zu $R \subseteq \mathrm{Ker}((G\pi_R) \circ \subseteq_{FA}^{GA} \circ \alpha_A)$, also dazu, daß R eine G-Kongruenz ist. □

In Beispiel 3.45 haben wir gesehen, daß eine entsprechende Aussage für Bisimulationen nicht gilt. Dort haben wir eine $(-)^3_2$-Coalgebra $\mathcal{A}$ angegeben, auf der die größte Bisimulation die Diagonale Δ_A ist. Über die offensichtliche injektive natürliche Transformation $\nu : (-)^3_2 \xrightarrow{\bullet} (-)^3$ erhalten wir aus $\mathcal{A}$ eine $(-)^3$-Coalgebra $\nu(\mathcal{A})$, auf der die größte Bisimulation die Allrelation $A \times A$ ist.

11. Bemerkungen und Literatur

Der für die gesamte Coalgebra grundlegende Artikel ist [**Rut00b**], wo eine Theorie der Coalgebren für **Set**-Funktoren, die schwache Pullbacks erhalten, entwickelt wird. Es gab allerdings Vorläufer: In [**Mar85**] dualisiert Marvan die Universelle Algebra, indem er statt Operationen $f_i : A^{n_i} \to A$ Co-Operationen $f_i : n_i \cdot A \to A$ betrachtet, also Coalgebren des Typs $\sum_{i \in I} (-)^{n_i}$. In [**Lam68**] betrachtet Lambek Coalgebren (wenn er sie auch nicht so nennt) und beweist u.a., daß Kategorien von Coalgebren covollständig sind.

In [**TG69**] und [**AKP72**] leiten V. Trnková and P. Goralčík bzw. Adámek et al. (Co-)Vollständigkeitsaussagen über Kategorien von **Set**-Coalgebren her. Der in diesen Artikeln betrachtete Rahmen ist: Gegeben sind zwei **Set**-Endofunktoren F und G, für die die Kategorie der (F, G)-Algebren (wir würden sie heute vielleicht Bialgebren nennen) betrachtet wird, deren Objekte Paare $(A, \alpha_A : FA \to GA)$ sind. Danach scheinen diese Artikel fast in Vergessenheit geraten zu sein (ich bin J. Adámek dankbar dafür, daß er mich auf diese Artikel hingewiesen hat).

In [**AT90**] verallgemeinern J. Adámek und V. Trnková die Automatentheorie auf eine andere Art und Weise, indem sie Automaten (ohne Anfangszustände) als Quadrupel (A, α_A, γ, i) betrachten, wobei $(A, \alpha_A : FA \to A)$ eine Algebra eines Funktors F ist, $\gamma : A \to C$ eine Ausgabefunktion, $i : I \to A$ eine Funktion, die die Startzustände definiert (dieser Automaten-Begriff geht auf Arbib und Manes [**AM74**] zurück). Sie diskutieren auch minimale Realisierungen solcher Automaten.

Einflußreich in der Coalgebra sind Peter Aczels Buch [**Acz88**] und der Artikel [**AM89**] von Aczel und Mendler geworden, in denen die Autoren den Begriff der Coalgebra und der Kongruenz im hier verwendeten Sinn definieren und Zusammenhänge zwischen terminalen Coalgebren einerseits und nichtfundierten Mengen andererseits herstellen sowie einen recht allgemeinen Existenzsatz für terminale Coalgebren beweisen. Auch in [**BM96**] von Barwise und Moss werden nichtfundierte Mengen im Zusammenhang mit Coalgebren betrachtet.

In [**TR98, RT94**] zeigen Rutten und Turi die Relevanz von Coalgebren für eine *finale Semantik* und leiten weitere Existenzsätze für terminale Coalgebren über verschiedenen Kategorien her.

Der eigentliche Durchbruch für eine Theorie der Coalgebren wurde durch [**Rut00b**] erreicht, wo Jan Rutten anhand vieler Beispiele demonstriert, daß sich viele zustandsbasierte Systemen als Coalgebren eines **Set**-Endofunktors modellieren lassen. Er entwickelt die Theorie für Funktoren, die schwache Pullbacks erhalten (und implizit wird angenommen, daß Untercoalgebren unter unendlichen Schnitten abgeschlossen sind). Diese Voraussetzungen, die in den nächsten Jahren in etlichen Arbeiten verwendet wurden, scheinen in der Praxis meistens erfüllt zu sein. Andererseits stellte sich heraus, daß einige Resultate aus [**Rut00b**] auch ohne Voraussetzungen an den Funktor gültig sind, und es fanden sich Funktoren, die interessant erschienen, aber schwache Pullbacks nicht erhielten. In [**Gum99, GS00, GS01d**] sind diese Fragen weiter untersucht worden.

Comonaden werden im Zusammenhang mit Coalgebren z.B. von Power in [**PW00**], Turi in [**Tur96**], Lenisa in [**Len99**] sowie Turi und Plotkin in [**TP97**] verwendet. Worrell ([**Wor98**]), Johnstone et al. ([**JPT$^+$01**]) sowie Power und Watanabe ([**PW98**]) untersuchen Kategorien von Coalgebren aus kategorientheoretischer Sicht, und in [**Kur00, Kur01, Kur99**] entwickelt Alexander Kurz eine Theorie der Coalgebra über allgemeineren Kategorien, allerdings sind seine Aussagen, wieder spezialisiert auf die Kategorie $\mathbf{Set}_F$, schwächer als die in dieser Arbeit entwickelten. Der Artikel [**KM00**] von Kawahara und Mori beweist ebenfalls einige Aussagen über Kongruenzen und natürliche Transformationen, wobei die Autoren den (unnötigen, s. die Sätze 3.12 und 4.15) Begriff der *strikten* natürlichen Transformation für eine natürliche Transformation einführen, die in allen Injektionen kartesisch ist.

KAPITEL 4

Limeserhaltung und $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulationen

In [**Rut00b**] hat Jan Rutten eine Theorie der Coalgebra für Funktoren entwickelt, die schwache Pullbacks erhalten. Wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, lassen sich viele Aussagen auch ohne diese Voraussetzung beweisen. Ziel dieses Kapitels ist es, zu untersuchen, wie Limes-Erhaltungseigenschaften des Funktors F mit bestimmten Eigenschaften der F-Coalgebren zusammenhängen. Die Abschnitte 1 und 2 enthalten eine Zusammenstellung der für dieses Kapitel wichtigsten Aussagen über (schwache) Limites, die Erhaltung von Limites durch F und den für die Coalgebra wohl wichtigsten Typ von Limes, den Pullback. Weiterhin werden wir sehen, daß wir Pullbacks und Equalizer mit leerer Grundmenge fast immer ignorieren können.

Eine der Kernaussagen aus [**Rut00b**] ist: Wenn F schwache Pullbacks erhält, dann ist der Pullback zweier F-Homomorphismen in **Set** eine Bisimulation, kurz (so Turi in [**Tur96**]): "pullbacks lift to bisimulations". In Abschnitt 4 werden wir diese Aussage verallgemeinern und vor allem eine Umkehrung beweisen: Dazu verallgemeinern wir den Begriff der κ-Simulation noch etwas zu dem der $\bar{\mathfrak{D}}$-*Simulation* über einem Diagramm $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$, und zeigen, daß F einen nicht-leeren Limes genau dann erhält, wenn sich dieser Limes immer zu einer $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation "liften" läßt.

Die größte $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation $\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}$ erscheint zunächst als natürlicher Kandidat für den Limes eines Diagramms $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$. In Abschnitt 5 werden wir sehen, daß unter der Voraussetzung $\sim_{\bar{\mathfrak{D}}} \neq \emptyset$ genau dann immer $\sim_{\bar{\mathfrak{D}}} = \lim \bar{\mathfrak{D}}$ gilt, wenn F den mono-source der Projektionen von $\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}$ erhält. Daraus folgt z.B., daß Produkte von zwei Coalgebren in $\mathbf{Set}_F$ genau dann immer durch die größte Bisimulation gegeben sind, wenn F alle endlichen mono-sourcen erhält.

Die Abschnitte 6-10 untersuchen die coalgebraische Bedeutung der (schwachen) Erhaltung bestimmter Klassen von Limites, u.a. werden folgende Zusammenhänge bewiesen (wobei vorausgesetzt wird, daß F alle endlichen Schnitte erhält):

F erhält (nicht-leere)		In $\mathbf{Set}_F$ gilt:
Pullbacks schwach	$\Longleftrightarrow$	Die Komposition von Bisimulationen ist immer eine Bisimulation
Kerne schwach	$\Longleftrightarrow$	Jede Kongruenz ist eine Bisimulation.
	$\Longleftrightarrow$	Jeder mono ist injektiv.
Urbilder	$\Longleftrightarrow$	Urbilder von Untercoalgebren unter Homomorphismen sind Untercoalgebren
	$\Longleftrightarrow$	Jeder Homomorphismus in eine Summe induziert eine Zerlegung des Definitionsbereichs
κ-Schnitte (für $\kappa \geq \omega$)	$\Longleftrightarrow$	κ-Schnitte von Untercoalgebren sind Untercoalgebren

Diese Eigenschaften sind nicht unabhängig voneinander, wir werden aus [**Trn71a**] erhalten:

F erhält Pullbacks
$\Rightarrow$ F erhält endliche mono-sourcen
$\Rightarrow$ F erhält Equalizer
$\Rightarrow$ F erhält Urbilder.

In Abschnitt 11 wird als Beispiel der *$\mathcal{M}$-Mengenfunktor* $\mathcal{M}^{(-)}$ für ein kommutatives Monoid $\mathcal{M}$ untersucht. Dieser Funktor $\mathcal{M}^{(-)}$ verallgemeinert den Potenzmengenfunktor. Seine Coalgebren sind Transitionssysteme, die für jedes Element von $\mathcal{M}$ eine Transitionsrelation haben. Es zeigt sich, daß bestimmte algebraische Eigenschaften von $\mathcal{M}$ äquivalent zur Erhaltung von Urbildern, Kernen und schwachen Pullbacks durch $\mathcal{M}^{(-)}$ sind, und wir werden dort durch geeignete Wahl von $\mathcal{M}$ Beispiele für Funktoren finden, die zwar Kerne schwach erhalten, nicht aber schwache Pullbacks.

Inhaltsangabe

1. Limites und schwache Limites in Set

In diesem Abschnitt werden einige bekannte Aussagen - man vgl. z.B. [**Lan71, HS73, AHS90**] - zu Limites und schwachen Limites in **Set** zusammengestellt, und wir geben Bedingungen dafür an, wann ein Funktor einen Limes (schwach) erhält.

Schwache Limites eines Diagramms in **Set** sind genau die Retrakte des Limes dieses Diagramms (das gilt sogar für jeden schwachen Limes eines Diagramms in einer Kategorie, wenn der Limes dieses Diagramms existiert). Genauer: Ist $\mathfrak{D}$ ein Diagramm in **Set**, $(L, (\pi_i : L \to A_i)_{A_i \in \mathfrak{D}})$ der Limes dieses Diagramms, so ist ein kompatibler Kegel $(L', (\pi'_i : L' \to A_i)_{A_i \in \mathfrak{D}})$ über $\mathfrak{D}$ genau dann ein schwacher Limes, wenn die eindeutige vermittelnde Abbildung $p : L' \to L$, die $\pi_i \circ p = \pi'_i$ für alle $A_i \in \mathfrak{D}$ erfüllt, surjektiv ist.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\pi_i"] & A_i \\
L' \arrow[u, "p"] \arrow[ur, "\pi'_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Jede der Abbildungen π_i nennen wir eine *kanonische Projektion von L*. Man kann einen (schwachen) Limes eines Diagramms elementweise beschreiben:

Definition 4.1 (kompatible Auswahl). Sei $\mathfrak{D}$ ein Diagramm in **Set**. Eine *kompatible Auswahl* in $\mathfrak{D}$ ist eine Familie $(a_i \in A_i)_{A_i \in \mathfrak{D}}$, die $fa_i = a_j$ für alle

Pfeile $(f : A_i \to A_j)$ in $\mathfrak{D}$ erfüllt.

$$\begin{tikzcd} a_i \arrow[d, mapsto, "f"'] & \in & A_i \arrow[d, "f"] \\ a_j & \in & A_j \end{tikzcd}$$

Der Limes von $\mathfrak{D}$ ist gerade die Menge aller kompatiblen Auswahlen, genauer:

LEMMA 4.2. *Sei $\mathfrak{D}$ ein Diagramm in* **Set**. *Dann ist ein kompatibler Kegel $(L, (\pi_i : L \to A_i)_{A_i \in \mathfrak{D}})$ genau dann ein schwacher Limes von $\mathfrak{D}$, wenn für alle kompatiblen Auswahlen $(a_i \in A_i)_{A_i \in \mathfrak{D}}$ von $\mathfrak{D}$ ein $l \in L$ existiert, das $\pi_i l = a_i$ für alle $A_i \in \mathfrak{D}$ erfüllt. Genau dann ist $(L, (\pi_i : L \to A_i)_{A_i \in \mathfrak{D}})$ ein Limes von $\mathfrak{D}$, wenn es immer genau so ein $l \in L$ gibt.*

Damit kann man die (schwache) Erhaltung eines Limes in **Set** durch F elementweise ausdrücken:

LEMMA 4.3. *Sei $\mathfrak{D}$ ein Diagramm in* **Set**, *$(L, (\pi_i : L \to A_i)_{A_i \in \mathfrak{D}})$ der Limes von $\mathfrak{D}$. Dann erhält F den Limes von $\mathfrak{D}$ genau dann schwach, wenn für jede kompatible Auswahl $(v_i \in FA_i)_{A_i \in \mathfrak{D}}$ von $F\mathfrak{D}$, dem Bild von $\mathfrak{D}$ unter F, ein $v \in FL$ existiert, das $(F\pi_i)v = v_i$ für alle $A_i \in \mathfrak{D}$ erfüllt. Ist dieses v sogar immer eindeutig, so erhält F den Limes von $\mathfrak{D}$.*

$$\begin{tikzcd} v \arrow[d, mapsto, "F\pi_i"'] & \in & FL \arrow[d, "F\pi_i"] \\ v_i & \in & FA_i \end{tikzcd}$$

Da **Set** vollständig ist, gilt:

LEMMA 4.4. *Sei $\mathfrak{D}$ ein Diagramm in* **Set**. *F erhält den Limes von $\mathfrak{D}$ genau dann schwach, wenn F schwache Limites von $\mathfrak{D}$ erhält. Ist eine der kanonischen Projektionen von* $\lim \mathfrak{D}$ *injektiv, so erhält F den Limes von $\mathfrak{D}$ genau dann, wenn F den Limes von $\mathfrak{D}$ schwach erhält.*

2. Pullbacks

Der innerhalb der Coalgebra wohl wichtigste Limes ist der Pullback. Das liegt einerseits daran, daß sich viele interessante Objekte (z.B. Schnitte und Urbilder von Untercoalgebren) als Pullbacks interpretieren lassen, andererseits daran, daß viele in der Praxis wichtige Funktoren Pullbacks schwach erhalten. In diesem Abschnitt untersuchen wir grundlegende Eigenschaften verschiedener Typen von Pullbacks. Allgemeiner betrachten wir auch Limites einer Familie $(f_i : A_i \to B)_{i \in I}$ von Morphismen mit gleichem Wertebereich; diese Limites nennen wir *I-Pullbacks* oder, wenn wir I nicht spezifieren wollen, *verallgemeinerte Pullbacks*. Wenn wir betonen wollen, daß wir Pullbacks und nicht schwache Pullbacks meinen, reden wir manchmal von *strikten Pullbacks* .

Seien $f : A \to C$, $g : B \to C$ zwei Abbildungen. Nach Lemma 4.2 ist die Menge $\{(a, b) \in A \times B \mid fa = gb\}$ mit den kanonischen Projektionen π_1, π_2 der Pullback $\mathrm{pb}(f, g)$ von f mit g.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Ist f injektiv (surjektiv), so ist auch π_2 injektiv (surjektiv) - man sagt kurz: Pullbacks von Injektionen (Surjektionen) sind Injektionen (Surjektionen). Folgendes Kriterium, das wir sehr häufig verwenden werden, ist ein Spezialfall von Lemma 4.3:

LEMMA 4.5. *F erhält genau dann den Pullback der Abbildungen $f : A \to C$, $g : B \to C$ schwach, wenn für alle $u \in FA$, $v \in FB$ mit $(Ff)u = (Fg)v$ ein $w \in F(\{(a,b) \in A \times B \mid fa = gb\})$ existiert mit $(F\pi_1)w = u$, $(F\pi_2)w = v$. Genau dann erhält F den Pullback von f mit g, wenn dieses w existiert und eindeutig ist.*

Bestimmte Typen von Pullbacks erhalten eigene Namen: Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

in **Set**. Ein Pullback dieses Diagramms heißt

Kern von f: wenn $A = B$ und $f = g$ gilt.
Urbild von B entlang f: wenn g injektiv ist.
klassifizierendes Urbild: wenn $B = 1$ und $C = 1 + 1$ ist und g die kanonische Einbettung von 1 in den rechten Summanden von $1 + 1$ ist.
Schnitt von A und B: wenn f und g injektiv sind.

Für eine Kardinalzahl κ heißt der verallgemeinerte Pullback einer κ-indizierten Familie von injektiven Abbildungen mit gleichem Wertebereich entsprechend *κ-Schnitt* . Wir werden auch Pullbacks in $\mathbf{Set}_F$ entlang einer injektiven Abbildungen Urbilder nennen, Pullbacks von injektiven Abbildungen Schnitte.

Die Bezeichnung "Urbild" rechtfertigt sich aus folgendem: Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, $V \subseteq B$ eine Teilmenge von B, so ist folgendes Diagramm ein Pullback:

$$\begin{tikzcd} f^{-}[V] \arrow[r, hook, "\subseteq"] \arrow[d, "f|^{|}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, hook, "\subseteq^B_V"'] & B, \end{tikzcd}$$

d.h., das Urbild von V unter f ist nichts anderes als die Grundmenge des Pullbacks von f mit $\subseteq^B_V$. Da man jede Injektion als kanonische Einbettung auffassen kann, rechtfertigt das den Begriff *Urbild* für einen Pullback entlang einer injektiven Abbildung. Der Begriff *klassifizierendes Urbild* kommt daher, daß $2 = 1 + 1$ der subobject classifier ([**Bor94c**]) in der Kategorie **Set** ist.

Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so ist der Pullback von f mit sich selbst gegeben durch die Menge $\operatorname{Ker} f = \{(a, a') \in A \mid fa = fa'\}$, also durch den Kern von f, weswegen wir solche Pullbacks Kerne nennen. Aus Lemma 4.4 schließen wir direkt:

LEMMA 4.6. *F erhält ein Urbild genau dann, wenn F dieses Urbild schwach erhält, und einen Schnitt genau dann, wenn F diesen Schnitt schwach erhält.*

Die meisten Funktoren, die in Anwendungen vorkommen, erhalten schwache Pullbacks: der Potenzmengenfunktor $\mathcal{P}$, der Filterfunktor $\mathcal{F}$, alle polynomialen Funktoren (s. Beispiel 3.2). Der Funktor $(-)^3_2$ erhält schwache Pullbacks nicht.

In der Kategorientheorie ist die Verwendung von schwachen Pullbacks wesentlich weniger gebräuchlich als die von Pullbacks. Es zeigt sich, daß sich viele Aussagen über Pullbacks auf schwache Pullbacks übertragen lassen. Es gilt, wie man leicht nachprüft (s. z.B. [**HS73**] für die Aussagen über strikte Pullbacks):

Lemma 4.7 (Pullback-Lemma). *Sei*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm in einer Kategorie. Dann gilt:

(1) *Sind beide Quadrate (schwache) Pullbacks, so auch das Rechteck.*
(2) *Sind das Rechteck und das rechte Quadrat Pullbacks, so ist das linke Quadrat ein Pullback.*

Insbesondere gilt: Sind beide Quadrate (schwache) Pullbacks, und erhält F diese (schwachen) Pullbacks, so überführt F auch das Rechteck in einen (schwachen) Pullback. Sind das Rechteck und das rechte Quadrat Pullbacks und erhält F diese beiden Pullbacks, dann erhält F auch den Pullback, den das linke Quadrat bildet.

Kurz gesagt: Pullbacks und schwache Pullbacks lassen sich "verkleben", Pullbacks lassen sich auch "rechts kürzen".

Bemerkung 4.8. Daraus, daß im obigen Diagramm das Rechteck ein Pullback ist, das rechte Quadrat ein *schwacher* Pullback, folgt im allgemeinen *nicht*, daß das linke Quadrat ein schwacher Pullback ist, wie man an folgendem Beispiel in **Set** sieht.

$$\begin{tikzcd} 2 \times 2 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\pi_2"'] & 2 \times 2 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "!'"'] & 2 \arrow[d, "!"] \\ 2 \arrow[r, "!"'] & 1 \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & 1, \end{tikzcd}$$

wobei $! : 2 \to 1$ und $!' : 2 \times 2 \to 1$ die eindeutigen Abbildungen sind. Das Diagramm kommutiert offensichtlich, das Rechteck ist ein Pullback und das rechte Quadrat ein schwacher Pullback, aber $(2 \times 2, \mathrm{id}, \pi_2)$ ist kein schwacher Pullback von $!$ mit $!'$, denn die Grundmenge des Pullbacks dieser beiden Abbildungen hat $|2 \times 2| \cdot |2| = 8$ Elemente.

Eine Konsequenz aus dem Pullback-Lemma ist:

Korollar 4.9. *F erhält genau dann Urbilder, wenn F klassifizierende Urbilder erhält (d.h., wenn F jedes klassifierende Urbild in einen Pullback überführt).*

Beweis. Da jedes klassifizierende Urbild ein Urbild ist, folgt daraus, daß F Urbilder erhält, auch die Erhaltung von klassifizierenden Urbildern.

Ist $(P, \pi_1 : P \to A, \pi_2 : P \to V)$ der Pullback einer Abbildung $f : A \to C$ mit einer injektiven Abbildung $g : V \hookrightarrow C$, so müssen wir nur folgendes Diagramm betrachten:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, hook, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, hook, "g"'] \arrow[d, "!_V"'] & C \arrow[d, "h"] \\ 1 \arrow[r, hook, "\mathrm{inr}"'] & 2. \end{tikzcd}$$

Hierbei ist

- $\mathrm{inr} : 1 \hookrightarrow 2 = 1 + 1$ die kanonische Einbettung in den rechten Summanden,
- $!_V : V \to 1$ die eindeutige Abbildung und

- h die eindeutig bestimmte Abbildung, die das untere Quadrat zum Pullback macht, d.h.

$$hc = \begin{cases} 1 & \text{wenn } c \in g[V] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  - anders gesagt: h ist die charakteristische Funktion von $g[V]$.

Das untere Quadrat und das Rechteck sind beides klassifizierende Urbilder, die nach Voraussetzung von F in Pullbacks überführt werden. Das Pullbacklemma zeigt, daß F dann auch den Pullback von f mit g erhält. □

Das Erhalten von (schwachen) Pullbacks setzt sich i.a. nicht auf Unterfunktoren fort: Der Funktor $(-)^3$ erhält Pullbacks, aber $(-)^3_2$ erhält nicht einmal schwache Pullbacks. Hingegen setzt sich das Erhalten von (schwachen) Pullbacks auf Zerlegungen eines Funktors fort. Genauer gilt, wie man sofort nachprüft:

Satz 4.10. *Seien $(F_i)_{i\in I}$ eine Familie von* **Set***-Funktoren, $f : A \to C$, $g : B \to C$ zwei Abbildungen mit gleichem Wertebereich. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *Für jedes $i \in I$ erhält F_i den Pullback von f mit g (schwach).*
- *$\sum_{i\in I} F_i$ erhält den Pullback von f mit g (schwach).*
- *$\prod_{i\in I} F_i$ erhält den Pullback von f mit g (schwach).*

Dieser Satz läßt sich genauso für verallgemeinerte Pullbacks beweisen. Damit ist leicht zu sehen, daß jeder polynomiale Funktor verallgemeinerte Pullbacks erhält. Aber auch die Umkehrung gilt: Ist F ein Funktor, der verallgemeinerte Pullbacks erhält, so können wir nach Satz 3.10 die Komponentenzerlegung von F durchführen, also F in Unterfunktoren F_e, $e \in F(1)$, zerlegen, für die $F = \sum_{e\in F(1)} F_e$ und $F_e(1) = 1$ für alle $e \in F(1)$ gilt. Dann erhalten aber alle F_e sowohl verallgemeinerte Pullbacks als auch das terminale Objekt 1, folglich alle Limites (s. z.B. [**HS73**]). Weiterhin gilt (s. z.B. [**Trn71a**], Kapitel VII und VIII), daß ein **Set**-Endofunktor genau dann alle Limites erhält, wenn er der Gestalt $(-)^M$ für eine Menge M ist. Das bedeutet also, daß $F = \sum_{e\in F(1)} (-)^{M_e}$ für geeignete Mengen M_e gilt, daß F also polynomial ist. Zusammenfassend:

Satz 4.11. *Ein Funktor ist genau dann polynomial, wenn er verallgemeinerte Pullbacks erhält.*

Bemerkung 4.12. F erhält genau dann alle Limites, wenn F alle Produkte erhält (s. z.B. [**Trn71a**]). Wenn F Produkte schwach erhält, kann man daraus *nicht* folgern, daß F auch alle Limites schwach erhält. Ein Gegenbeispiel hierfür ist der *wesentliche Potenzmengenfunktor* $\mathcal{P}'$, ein Unterfunktor des Potenzmengenfunktors, definiert durch $\mathcal{P}'A := \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$, der zwar Produkte schwach erhält, aber Equalizer nicht (schwach) erhält.

Wir zeigen jetzt, warum wir Pullbacks und Equalizer mit leerer Grundmenge fast immer ignorieren können: Sei $\mathfrak{D}$ ein Diagramm in **Set**. Wir betrachten das Diagramm $\mathfrak{D}+1$, das wie folgt aus $\mathfrak{D}$ entsteht: Ist A_i ein Objekt in $\mathfrak{D}$, so ist A_i+1 ein Objekt in $\mathfrak{D}+1$, und ist $(f : A_i \to A_j)$ ein Pfeil in $\mathfrak{D}$, so ist $(f+\mathrm{id}_1 : A_i+1 \to A_j+1)$ ein Pfeil in $\mathfrak{D}+1$.

$$\mathfrak{D} = \begin{array}{c} A_i \\ \downarrow{\scriptstyle f} \\ A_j \end{array} \qquad \mathfrak{D}+1 = \begin{array}{c} A_i+1 \\ \downarrow{\scriptstyle f+\mathrm{id}_1} \\ A_j+1 \end{array}$$

- etwas formaler gesprochen: $\mathfrak{D}+1$ ist das Bild von $\mathfrak{D}$ unter dem Funktor $(-)+1$: $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$. Wir beweisen jetzt, daß mit den eben eingeführten Notationen gilt:

LEMMA 4.13. *Sei $\mathfrak{D}$ ein Diagramm in* $\mathbf{Set}$ *mit leerem Limes* $(\emptyset, \emptyset_{A_i} : \emptyset \to A_i)$. *Wir betrachten für jedes $A_i \in \mathfrak{D}$ die Summe*

$$A_i \xhookrightarrow{e_i} A_i + 1 \xhookleftarrow{f_i} 1$$

Dann gilt: Wenn $(1, (f_i)_{A_i \in \mathfrak{D}})$ der Limes von $\mathfrak{D}+1$ ist und F diesen Limes schwach erhält, so erhält F den Limes von $\mathfrak{D}$.

BEWEIS. F erhalte den Limes von $\mathfrak{D}+1$ schwach. Wir müssen zeigen, daß $(F\emptyset, (F(\emptyset_{A_i}) : F\emptyset \to FA_i)_{A_i \in \mathfrak{D}})$ der Limes von $F\mathfrak{D}$ ist. Dazu prüfen wir die Bedingung aus Lemma 4.3 nach: Sei also $(v_i \in FA_i)_{A_i \in \mathfrak{D}}$ eine kompatible Auswahl von $F\mathfrak{D}$. Wir müssen ein eindeutiges $v \in F\emptyset$ finden, das $F(\emptyset_{A_i})v = v_i$ für alle $A_i \in \mathfrak{D}$ erfüllt. $(F(e_i)v_i \in F(A_i+1))_{A_i \in \mathfrak{D}}$ ist eine kompatible Auswahl für $F(\mathfrak{D}+1)$, und nach Voraussetzung an F finden wir ein $w \in F1$, das $F(f_i)w = F(e_i)v_i$ für alle $A_i \in \mathfrak{D}$ erfüllt. Da F endliche Schnitte erhält, gilt aber

$$F(f_i)[F1] \cap F(e_i)[FA_i] = F(\emptyset_{A_i+1})[F\emptyset],$$

Folglich finden wir genau ein $u_i \in F(\emptyset)$ mit $F(\emptyset_{A_i})u_i = v_i$ und $F(\emptyset_1)u_i = w$. Ist $A_j \in \mathfrak{D}$ ein anderes Objekt von $\mathfrak{D}$, so gilt wegen der zweiten Gleichung $u_i = u_j$, das heißt, wir haben mit $v := u_i$ ein Element von $F(\emptyset)$ gefunden, das $F(\emptyset_{A_i})v = v_i$ für alle $A_i \in \mathfrak{D}$ erfüllt, somit erhält F den Limes von $\mathfrak{D}$ schwach.

Daraus, daß $F(\emptyset_{A_i})$ injektiv für ein (und sogar für alle A_i) ist, folgt die Eindeutigkeit von v, d.h., F erhält den Limes von $\mathfrak{D}$. □

Daraus können wir schließen:

KOROLLAR 4.14. *Es gilt:*

- *F erhält Pullbacks $\iff$ F erhält nicht-leere Pullbacks.*
- *F erhält Pullbacks schwach $\iff$ F erhält nicht-leere Pullbacks schwach.*
- *F erhält Kerne $\iff$ F erhält nicht-leere Kerne.*
- *F erhält Kerne schwach $\iff$ F erhält nicht-leere Kerne schwach.*
- *F erhält Urbilder $\iff$ F erhält nicht-leere Urbilder.*
- *F erhält κ-Schnitte $\iff$ F erhält nicht-leere κ-Schnitte, wobei κ eine Kardinalzahl ist.*
- *F erhält Equalizer $\iff$ F erhält nicht-leere Equalizer.*

Dieses Korollar werden wir im folgenden stillschweigend verwenden.

3. Kartesische Transformationen

Jetzt betrachten wir noch Transformationen zwischen zwei Typfunktoren, bei denen bestimmte Diagramme Pullbacks sind: Ist eine Transformation $\nu : F \to G$ in einer Abbildung $f : A \to B$ natürlich und das Natürlichkeitsdiagramm ein Pullback, so nennen wir ν nach Definition 3.11 *kartesisch in f*.

Ist ν in allen nicht-leeren Injektionen natürlich, so erhält die Objektabbildung $\nu \circ (-) : \mathbf{Set}_F \to \mathbf{Set}_G$ Untercoalgebren: Sei $U \subseteq A$ eine F-Untercoalgebra von $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$. Ist $U = \emptyset$, so ist U immer eine G-Untercoalgebra von $\nu(\mathcal{A})$. Also können wir $U \neq \emptyset$ annehmen. Wir finden eine Abbildung $\alpha_U : U \to FU$, so daß im

Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook, "\subseteq_U^A"] \arrow[d, "\alpha_U"'] & A \arrow[d, "\alpha_A"] \\
FU \arrow[r, hook, "F\subseteq_U^A"] \arrow[d, "\nu_U"'] & FA \arrow[d, "\nu_A"] \\
GU \arrow[r, hook, "G\subseteq_U^A"] & GA
\end{tikzcd}$$

das obere Quadrat kommutiert. Das untere Quadrat kommutiert nach Voraussetzung, also kommutiert auch das Rechteck, was zeigt, daß U eine G-Untercoalgebra von $\nu(\mathcal{A})$ ist. Ist ν zusätzlich kartesisch in allen nicht-leeren Injektionen, ist auch jede G-Untercoalgebra von $\nu(\mathcal{A})$ eine F-Untercoalgebra von $\mathcal{A}$. Genauer gilt:

Satz 4.15. *Sei $\nu : F \to G$ eine Transformation zwischen F und G, die in allen Injektionen natürlich ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
1. *ν ist in allen Injektionen kartesisch.*
2. *ν ist in allen nicht-leeren Injektionen kartesisch.*
3. *Für jede F-Coalgebra $\mathcal{A}$ gilt: Eine Teilmenge $U \subseteq A$ ist genau dann eine F-Untercoalgebra von $\mathcal{A}$, wenn sie eine G-Untercoalgebra von $\nu(\mathcal{A})$ ist.*

Beweis. (1)$\Rightarrow$(2) ist trivial, (2)$\Rightarrow$(3): Daß jede F-Untercoalgebra von $\mathcal{A}$ auch eine G-Untercoalgebra von $\nu(\mathcal{A})$ ist, haben wir schon vor dem Satz diskutiert. Ist umgekehrt $U \subseteq A$ eine G-Untercoalgebra von $\nu(\mathcal{A})$, so finden wir eine Abbildung $\theta : U \to GU$, für die folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\subseteq_U^A"] \arrow[dd, bend right, "\theta"'] & A \arrow[d, "\alpha_A"] \\
FU \arrow[r, "F(\subseteq_U^A)"] \arrow[d, "\nu_U"] & FA \arrow[d, "\nu_A"] \\
GU \arrow[r, "G(\subseteq_U^A)"'] & GA
\end{tikzcd}$$

Damit ist aber $(U, \alpha_A \circ \subseteq_U^A, \theta)$ ein Konkurrent des Pullbacks $(FU, F(\subseteq_U^A), \nu_U)$, d.h., wir finden (genau) eine Abbildung $\alpha_U : U \to FU$, die dieses Diagramm kommutativ ergänzt. Das zeigt (3).

(3)$\Rightarrow$(1): Sei $\subseteq_U^A : U \hookrightarrow A$ eine kanonische Injektion. Wir zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
FU \arrow[r, "F(\subseteq_U^A)"] \arrow[d, "\nu_U"] & FA \arrow[d, "\nu_A"] \\
GU \arrow[r, "G(\subseteq_U^A)"'] & GA
\end{tikzcd}$$

ein Pullback ist. Da $F(\subseteq_U^A)$ injektiv ist, müssen wir nur zeigen, daß es ein schwacher Pullback ist. Dazu seien $v \in FA$, $w \in GU$ mit $\nu_A(v) = G(\subseteq_U^A)(w)$ gegeben. Dann definieren wir auf A die konstante F-Coalgebrenstruktur α_A^v (s. Definition 3.18). Damit ist U offenbar eine G-Untercoalgebra von $\nu(A, \alpha_A^v)$ mittels der Strukturabbildung α_U^w, also nach Voraussetzung eine F-Untercoalgebra von A. Das bedeutet aber, daß ein $q \in F(U)$ existiert mit $F(\subseteq_U^A)q = v$. Dann ist auch

$$G(\subseteq_U^A)(\nu_U u) = \nu_A(F(\subseteq_U^A)q) = \nu_A(v) = G(\subseteq_U^A)(w),$$

also $\nu_U u = w$, was zeigt, daß das Diagramm ein Pullback ist. Daraus folgt (1), da sich jede Injektion als kanonische Injektion auffassen läßt. □

Damit folgern wir aus Satz 3.12, daß Untercoalgebren mit Unterfunktoren kompatibel sind, genauer:

SATZ 4.16. *Jede injektive natürliche Transformation $\nu : F \xrightarrow{\bullet} G$ ist in allen Injektionen kartesisch. Insbesondere stimmen die Untercoalgebren von $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ mit denen von $\nu(\mathcal{A}) \in \mathbf{Set}_G$ überein.*

4. $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulationen und das Lifting von Limites

Eine der Kernaussagen aus [**Rut00b**] ist: Wenn F schwache Pullbacks erhält, dann ist der Pullback zweier F-Homomorphismen in **Set** eine Bisimulation, kurz (so Turi in [**Tur96**]): "pullbacks lift to bisimulations". Um diese Aussage zu verallgemeinern und eine Umkehrung zu beweisen, betrachten wir jetzt κ-Simulationen, die mit gegebenen Homomorphismen verträglich sind. Wir werden dazu sowohl Diagramme in $\mathbf{Set}_F$ als auch Diagramme in **Set** betrachten müssen. Haben wir ein Diagramm $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$, so können wir ein Diagramm $\mathfrak{D}$ in **Set** konstruieren, indem wir auf alle Objekte und Pfeile von $\bar{\mathfrak{D}}$ den Vergißfunktor $U : \mathbf{Set}_F \to \mathbf{Set}$ anwenden. Wir nennen $\mathfrak{D}$ das *unterliegende Diagramm* von $\bar{\mathfrak{D}}$. Wenn wir umgekehrt von einem Diagramm $\mathfrak{D}$ in **Set** ausgehen, können wir ein Diagramm $\bar{\mathfrak{D}}$ mit $U\bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}$ konstruieren, indem wir für jede Menge $A_i \in \mathfrak{D}$ eine Coalgebrenstruktur $\alpha_i : A_i \to FA_i$ finden, für die alle Abbildungen $(f : A_i \to A_j) \in \mathfrak{D}$ zu F-Homomorphismen werden.

$$\bar{\mathfrak{D}} = \begin{array}{c}(A_i,\alpha_i)\\ \Big\downarrow f\\ (A_j,\alpha_j)\end{array} \qquad \mathfrak{D} = \begin{array}{c}A_i\\ \Big\downarrow f\\ A_j\end{array}$$

Wir nennen das so entstehende Diagramm $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$ ein *Lifting von $\mathfrak{D}$ (auf $\mathbf{Set}_F$).*

Im folgenden wird sehr wichtig sein, daß jede kompatible Auswahl des Diagramms $F(\mathfrak{D})$ ein Lifting von $\mathfrak{D}$ induziert, genauer erhalten wir mit Satz 3.19:

LEMMA 4.17. *Sei $\mathfrak{D}$ ein Diagramm in* **Set**, *$(v_i \in FA_i)_{A_i \in \mathfrak{D}}$ ein kompatible Auswahl des Diagramms $F(\mathfrak{D})$. Dann ist durch die konstanten Coalgebrenstrukturen $\alpha^{v_i}_{A_i} : A_i \to FA_i$, $A_i \in \mathfrak{D}$, (s. Definition 3.18) ein Lifting von $\mathfrak{D}$ gegeben. Dieses Lifting bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{D}}^{(v_i)}$.*

DEFINITION 4.18. Seien $\bar{\mathfrak{D}}$ ein Diagramm in $\mathbf{Set}_F$, $(L, (\pi_i : L \to A_i)_{\mathcal{A}_i \in \bar{\mathfrak{D}}})$ der Limes des unterliegenden Diagramms $\mathfrak{D}$ in **Set**. Eine *$\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation* ist eine Teilmenge R von L, für die es eine Coalgebrenstruktur $\alpha_R : R \to FR$ gibt, die alle Projektionen $(\pi_i)_{|R}$ zu Homomorphismen macht. Jedes solche α_R nennen wir eine *$\bar{\mathfrak{D}}$-Simulationsstruktur.*

Im Spezialfall eines diskreten Diagramms $\bar{\mathfrak{D}}$ mit κ Objekten sind also $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulationen gerade κ-Simulationen . Für $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulationen gelten analoge Aussagen wie für κ-Simulationen:

SATZ 4.19. *Vereinigungen von $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulationen sind wieder $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulationen, die leere Menge ist immer eine $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation, und die $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulationen bilden einen vollständigen Verband . Insbesondere gibt es immer eine größte $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation $\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}$, und für jede Menge $R \subseteq \lim \mathfrak{D}$ gibt es eine coerzeugte $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation $[R]_{\bar{\mathfrak{D}}}$. Jeder kompatible Kegel $(\varphi_i : \mathcal{R} \to \mathcal{A}_i)_{\mathcal{A}_i \in \bar{\mathfrak{D}}}$ über $\bar{\mathfrak{D}}$ induziert eine Abbildung $p : R \to \sim_{\bar{\mathfrak{D}}}$*

mit $\pi_i \circ p = \varphi_i$ *für alle* $\mathcal{A}_i \in \mathfrak{D}$*, deren Bild eine* $\bar{\mathfrak{D}}$*-Simulation ist, die* kanonische Abbildung *dieses Kegels.*

Beweis. Den Beweis führt man genauso wie für κ-Simulationen (Satz 3.21), oder man verwendet Satz 3.21 und überprüft nur die Kompatibilitätsbedingungen. □

Bemerkung 4.20. Die Definition einer $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation hängt nicht wesentlich von der Wahl von $\lim \mathfrak{D}$ ab: Sind $(L, (\pi_i : L \to A_i)_{\mathcal{A}_i \in \bar{\mathfrak{D}}})$ und $(L', (\pi_i' : L' \to A_i)_{\mathcal{A}_i \in \bar{\mathfrak{D}}})$ beides Limites von $\mathfrak{D}$ in **Set** und ist $i : L \to L'$ der vermittelnde Isomorphismus, so gibt es auf einer Menge $R \subseteq L$ genau dann eine Coalgebrenstruktur, die alle π_i zu Homomorphismen macht, wenn es auf $i[R] \subseteq L'$ eine Coalgebrenstruktur gibt, die alle π_i' zu Homomorphismen macht. Wir werden uns daher nicht auf eine "kanonische" Darstellung von $\lim \mathfrak{D}$ festlegen, sondern immer die in der jeweiligen Anwendung angenehmste verwenden.

Den folgenden Hauptsatz werden in diesem Kapitel auf etliche spezielle Limites anwenden:

Hauptsatz 4.21. *Sei* $(L, (\pi_i : L \to A_i)_{A_i \in \mathfrak{D}})$ *der Limes des Diagramms* $\mathfrak{D}$ *in* **Set**. *Wenn* $L \neq \emptyset$ *ist, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) F *erhält* $\lim \mathfrak{D}$ *schwach.*
(2) *Für jedes Lifting* $\bar{\mathfrak{D}}$ *von* $\mathfrak{D}$ *ist* L *eine* $\bar{\mathfrak{D}}$*-Simulation.*
(3) *Für jedes Lifting* $\bar{\mathfrak{D}}$ *von* $\mathfrak{D}$ *ist* $\sim_{\bar{\mathfrak{D}}} = L$.
(4) *Für jedes Lifting* $\bar{\mathfrak{D}}$ *von* $\mathfrak{D}$ *ist* $\sim_{\bar{\mathfrak{D}}} \neq \emptyset$.

Beweis.
- (1)⇒(2): Diese Implikation geht im Kern auf [**Rut00b**] zurück und wird dort für den Fall von Pullbacks formuliert und bewiesen. Sei also $\bar{\mathfrak{D}}$ ein Lifting von $\mathfrak{D}$, d.h., wir haben für alle $A_i \in \mathfrak{D}$ eine Strukturabbildung $\alpha_i : A_i \to FA_i$, so daß $(Ff) \circ \alpha_j = f \circ \alpha_i$ für alle $(f : A_i \to A_j) \in \mathfrak{D}$ gilt. Nach Voraussetzung ist $(FL, (F\pi_i : FL \to FA_i)_{A_i \in \mathfrak{D}})$ ein schwacher Limes. $(L, (\alpha_i \circ \pi_i)_{A_i \in \mathfrak{D}})$ ist ein Konkurrent dieses schwachen Limes, d.h., wir finden eine Abbildung $\alpha_L : L \to FL$, die $F(\pi_i) \circ \alpha_L = \alpha_i \circ \pi_i$ für alle $A_i \in \mathfrak{D}$ erfüllt, für die also jedes π_i ein Homomorphismus ist. Folglich ist L eine $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "\pi_j"] \arrow[dr, "\pi_i"] \arrow[dd, dashed, "\alpha_L"'] & & A_j \arrow[dd, "\alpha_j"] \\
& A_i \arrow[ur, "f"] \arrow[dd, "\alpha_i"] & \\
FL \arrow[rr, "F\pi_j"] \arrow[dr, "F\pi_i"'] & & FA_j \\
& FA_i \arrow[ur, "Ff"'] &
\end{tikzcd}$$

- (2) $\iff$ (3), (3)⇒(4): offensichtlich.
- (4)⇒(1): Wir überprüfen die Bedingung von Lemma 4.3. Ist $(v_i \in FA_i)_{A_i \in \mathfrak{D}}$ eine kompatible Auswahl, so betrachten wir das Lifting $\bar{\mathfrak{D}}^{(v_i)}$ (s. Lemma 4.17). Nach Voraussetzung ist $\emptyset \neq \sim_{\bar{\mathfrak{D}}^{(v_i)}} \subseteq L$. Sei $\rho : \sim_{\bar{\mathfrak{D}}^{(v_i)}} \to F(\sim_{\bar{\mathfrak{D}}^{(v_i)}})$ eine $\bar{\mathfrak{D}}^{(v_i)}$-Simulationsstruktur, $d \in \sim_{\bar{\mathfrak{D}}^{(v_i)}}$ ein beliebiges Element. Dann gilt $(F\pi_i)(\rho(d)) = \alpha_i(\pi_i d) = v_i$ für jedes $A_i \in \mathfrak{D}$, folglich erfüllt $v := F(\subseteq^L_{\sim_{\bar{\mathfrak{D}}^{(v_i)}}})(\rho(d))$ die Bedingung aus Lemma 4.3.

□

Wir werden noch häufiger Limites mit nicht-leerer Grundmenge betrachten und bezeichnen solche Limites kurz als *nicht-leere Limites*.

5. Limites in $\mathbf{Set}_F$ und $\mathfrak{D}$-Simulationen

Wir untersuchen jetzt, wann der Limes eines Diagramms $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$ durch die größte $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation gegeben ist.

DEFINITION 4.22 (mono-source). Ein *source* in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Paar $(A, (f_i : A \to B_i)_{i \in I})$, bestehend aus einem Objekt $A \in \mathcal{C}$ und einer Familie von Morphismen mit gleichem Definitionsbereich. Wenn keine Mißverständnisse auftreten können, werden wir auch die Familie $(f_i)_{i \in I}$ als source bezeichnen. Wollen wir die Indexmenge I betonen, sprechen wir auch von einem *I-source*.

Der source $(f_i : A \to B_i)_{i \in I}$ heißt *mono-source*, wenn die f_i gemeinsam linkskürzbar sind, d.h, wenn für alle Morphismen $g, h : C \to A$ gilt:

$$(\forall i \in I . f_i \circ g = f_i \circ h) \Rightarrow g = h.$$

Die kanonischen Projektionen eines Limes bilden einen mono-source. Umgekehrt ist ein schwacher Limes genau dann ein Limes, wenn seine Projektionen einen mono-source bilden.

Wir werden uns vor allem für sourcen in **Set** interessieren. Ein source $(A, (f_i : A \to B_i)_{i \in I})$ in **Set** ist genau dann ein mono-source, wenn er die Punkte von A trennt, d.h., wenn für alle $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$ ein $i \in I$ existiert mit $f_i a \neq f_i a'$.

SATZ 4.23. *Sei $\mathfrak{D}$ ein Diagramm in* **Set** *mit nicht-leerem Limes $(L \neq \emptyset, (\pi_i : L \to A_i)_{A_i \in \mathfrak{D}})$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *F erhält den mono-source $(\pi_i)_{A_i \in \mathfrak{D}}$, d.h., $(F\pi_i)_{A_i \in \mathfrak{D}}$ ist ein mono-source.*
2. *Für jedes Lifting $\bar{\mathfrak{D}}$ von $\mathfrak{D}$ ist die Coalgebrenstruktur, die $\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}$ zur $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation macht, eindeutig.*

BEWEIS. (1)$\Rightarrow$(2): Sei das Lifting $\bar{\mathfrak{D}}$ durch die Familie der Strukturabbildungen $(\alpha_i : A_i \to FA_i)_{A_i \in \mathfrak{D}}$ gegeben. Jede $\mathfrak{D}$-Simulationsstruktur ρ auf $\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}$ läßt für jedes $A_i \in \mathfrak{D}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[d, "\alpha_i"'] & \sim_{\bar{\mathfrak{D}}} \arrow[l, "\pi_i"'] \arrow[d, dashed, "\rho"] \\ FA_i & F(\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}) \arrow[l, "F\pi_i"] \end{tikzcd}$$

kommutieren, und da $(F\pi_i)_{A_i \in \mathfrak{D}}$ ein mono-source ist, ist ρ eindeutig.

(2)$\Rightarrow$(1): Seien $x, y \in FL$ gegeben mit $(F\pi_i)x = (F\pi_i)y$ für alle $A_i \in \mathfrak{D}$. Für das Lifting $\bar{\mathfrak{D}}^{((F\pi_i)x)}$ (s. Lemma 4.17) gibt es auf L zwei $\bar{\mathfrak{D}}^{((F\pi_i)x)}$- Simulationsstrukturen, nämlich α_L^x und α_L^y, die nach Voraussetzung gleich sind. Wegen $L \neq \emptyset$ können wir $x = y$ schließen. □

Weiterhin gilt:

LEMMA 4.24. *Sei $\bar{\mathfrak{D}}$ ein Diagramm in $\mathbf{Set}_F$. Wenn $(\mathcal{L}, (\rho_i : \mathcal{L} \to \mathcal{A}_i)_{\mathcal{A}_i \in \bar{\mathfrak{D}}})$ ein Limes von $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$ ist, dann ist die kanonische Abbildung $p : L \to \sim_{\bar{\mathfrak{D}}}$ des Kegels $(\mathcal{L}, (\rho_i : \mathcal{L} \to \mathcal{A}_i)_{\mathcal{A}_i \in \bar{\mathfrak{D}}})$ (s. Satz 4.19) surjektiv.*

BEWEIS. Es gibt auf $\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}$ eine $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulations-Struktur γ; dieses γ macht $(\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}, \gamma)$ mit den Projektionen $\pi_i : (\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}, \gamma) \to \mathcal{A}_i$ zum Konkurrenten des Limes, wir erhalten also einen eindeutigen Homomorphismus $\psi : (\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}, \gamma) \to \mathcal{L}$ mit $\rho_i \circ \psi = \pi_i$. Dann gilt für jedes $\mathcal{A}_i \in \bar{\mathfrak{D}}$

$$\pi_i \circ p \circ \psi = \rho_i \circ \psi = \pi_i \circ \mathrm{id}_{\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}},$$

und da die Familie $(\pi_i)_{\mathcal{A}_i \in \bar{\mathfrak{D}}}$ ein mono-source in **Set** ist, können wir $\mathrm{id}_{\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}} = p \circ \psi$ schließen, d.h., p ist surjektiv.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, bend left, "p"] \arrow[dr, "\rho_i"] & \\ \sim_{\bar{\mathfrak{D}}} \arrow[u, bend left, "\psi"] \arrow[r, "\pi_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

□

LEMMA 4.25. *Wenn für ein Diagramm $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$ der Limes $(\mathcal{L}, (\rho_i : \mathcal{L} \to \mathcal{A}_i)_{\mathcal{A}_i \in \bar{\mathfrak{D}}})$ existiert, dann sind für jede $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulationsstruktur γ auf $\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}$ folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Die kanonische Abbildung $p : L \to \sim_{\bar{\mathfrak{D}}}$ von $(\mathcal{L}, (\rho_i : \mathcal{L} \to \mathcal{A}_i)_{\mathcal{A}_i \in \bar{\mathfrak{D}}})$ ist ein Homomorphismus $\mathcal{L} \to (\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}, \gamma)$.*
2. *Es gibt einen Homomorphismus $\varphi : \mathcal{L} \to (\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}, \gamma)$, der $\pi_i \circ \varphi = \rho_i$ für alle $\mathcal{A}_i \in \bar{\mathfrak{D}}$ erfüllt.*
3. *$(\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}, \gamma)$ ist zusammen mit den Projektionen π_i der Limes von $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$.*
4. *$(\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}, \gamma)$ ist zusammen mit den Projektionen π_i ein schwacher Limes von $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$.*

BEWEIS. Die Äquivalenz von (1) und (2) sowie die Implikationen (3)⇒(4)⇒(2) sind offensichtlich. (1)⇒(3): Aus Lemma 4.24 folgt, daß p surjektiv ist. Andererseits existiert ein Homomorphismus $\psi : (\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}, \gamma) \to \mathcal{L}$ mit $\rho_i \circ \psi = \pi_i$, und es folgt, daß

$$\rho_i \circ \mathrm{id}_{\mathcal{L}} = \rho_i \circ \psi \circ p$$

für alle $\mathcal{A}_i \in \bar{\mathfrak{D}}$ gilt, also $\mathrm{id}_{\mathcal{L}} = \psi \circ p$, somit ist p injektiv und daher ein Isomorphismus. □

Damit können wir jetzt das Hauptergebnis dieses Abschnitts beweisen:

HAUPTSATZ 4.26. *Sei $(L \neq \emptyset, (\pi_i : L \to A_i)_{A_i \in \mathfrak{D}})$ der Limes des Diagramms $\mathfrak{D}$ in **Set**. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Für jedes Lifting $\bar{\mathfrak{D}}$ von $\mathfrak{D}$ gilt $\lim \bar{\mathfrak{D}} = \sim_{\bar{\mathfrak{D}}}$ für eine geeignete $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulationsstruktur auf $\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}$; die kanonischen Homomorphismen des Limes sind die Projektionen π_i.*
2. *Für jedes Lifting $\bar{\mathfrak{D}}$ von $\mathfrak{D}$ ist die $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulationsstruktur auf $\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}$ eindeutig.*
3. *F erhält den mono-source $(L, (\pi_i)_{A_i \in \mathfrak{D}})$.*

Insbesondere ist $\mathbf{Set}_F$ vollständig, wenn F alle mono-sourcen erhält.

BEWEIS. (2) $\iff$ (3) folgt aus Satz 4.23, (1)⇒(2) ist offensichtlich.

(3)⇒(1): Sei $\bar{\mathfrak{D}}$ ein Lifting von $\mathfrak{D}$. Auf der größten $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation gibt es nach Satz 4.23 eine eindeutige $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulationsstruktur $\gamma : \sim_{\bar{\mathfrak{D}}} \to F(\sim_{\bar{\mathfrak{D}}})$. Wir behaupten, daß $(\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}, \gamma)$ mit den Projektionen π_i der Limes von $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$ ist. Sei also $(\mathcal{Q}, (\varphi_i : \mathcal{Q} \to \mathcal{A}_i)_{\mathcal{A}_i \in \bar{\mathfrak{D}}})$ ein Kegel über $\bar{\mathfrak{D}}$, Sei $f : \mathcal{Q} \to \sim_{\bar{\mathfrak{D}}}$ die kanonische Abbildung dieses Kegels (s. Satz 4.19). Dann kommutieren im Diagramm

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\varphi_i"'] \arrow[rr, bend left, dashed, "f"] \arrow[d, "\alpha_Q"'] & A_i \arrow[d, "\alpha_i"] & \sim_{\bar{\mathfrak{D}}} \arrow[l, "\pi_i"] \arrow[d, "\gamma"] \\ FQ \arrow[r, "F(\varphi_i)"] \arrow[rr, bend right, dashed, "Ff"'] & FA_i & F(\sim_{\bar{\mathfrak{D}}}) \arrow[l, "F(\pi_i)"'] \end{tikzcd}$$

die beiden Quadrate und es gilt $\pi_i \circ f = Ff \circ \alpha_Q$ für alle π_i. Folglich gilt für alle π_i

$$F(\pi_i) \circ \gamma \circ f = \alpha_i \circ \pi_i \circ f = F(\pi_i) \circ F(f) \circ \alpha_Q,$$

und da wir die $F(\pi_i)$ gemeinsam links kürzen können, folgt $\gamma \circ f = F(f) \circ \alpha_Q$. Somit ist f ein Homomorphismus, der offensichtlich eindeutig ist. $\square$

KOROLLAR 4.27. *Sei $(L, (\pi_i : L \to A_i)_{A_i \in \mathfrak{D}})$ der Limes des Diagramms $\mathfrak{D}$ in* $\mathbf{Set}$. *Ist eines der π_i injektiv, dann existiert der Limes von $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$ immer und es gilt $\sim_{\bar{\mathfrak{D}}} = \lim \bar{\mathfrak{D}}$. Gilt zusätzlich $L \neq \emptyset$, so gilt genau dann für jedes Lifting $\bar{\mathfrak{D}}$ von $\mathfrak{D}$ die Gleichung $L = U(\lim \bar{\mathfrak{D}})$, wenn F den Limes von $\mathfrak{D}$ erhält.*

BEWEIS. Sei π_i injektiv. Dann ist auch $F\pi_i$ injektiv und daher $(F\pi_i)_{A_i \in \mathfrak{D}}$ ein mono-source. Der zweite Teil folgt mit Hauptsatz 4.21. $\square$

Um diese Ergebnisse anwenden zu können, ist es wichtig, zu wissen, wann ein Funktor mono-sourcen erhält. Wir beweisen:

LEMMA 4.28 ([**GS01d**]). *Für jede Kardinalzahl κ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *F erhält κ-mono-sourcen.*
2. *F erhält mono-sourcen der Form $(\prod_{i<\kappa} X_i, (\pi_j : \prod_{i<\kappa} X_i \to X_j)_{j<\kappa})$, wobei die π_j die Projektionen des Produktes sind.*
3. *Für jede Familie $(X_i)_{i<\kappa}$ von Mengen und alle $u, v \in F(\prod_{i<\kappa} X_i)$ gilt:*

$$(\forall i < \kappa . F(\pi_i)(u) = F(\pi_i)(v)) \Rightarrow u = v.$$

BEWEIS. (1) $\Rightarrow$ (2) und (2) $\iff$ (3) sind offensichtlich.

Für den Beweis von (2) $\Rightarrow$ (1) beachte man, daß die Familie $(f_i : X \to X_i)_{i<\kappa}$ genau dann ein κ-mono-source ist, wenn die Abbildung $(f_i)_{i<\kappa} : X \to \prod_{i<\kappa} X_i$ injektiv ist. Sei also $(f_i : X \to X_i)_{i<\kappa}$ ein mono-source. Dann ist die Abbildung $F(f_i)_{i<\kappa} : F(X) \to F(\prod_{i<\kappa} X_i)$ injektiv. Nach Voraussetzung ist $(F(\prod_{i<\kappa} X_i), (F(\pi_i))_{i<\kappa})$ ein mono source, also auch

$$(F(X), (F(\pi_i) \circ F((f_j)_{j<\kappa})_{i<\kappa})) = (F(X), (F(f_i))_{i<\kappa}).$$

$\square$

SATZ 4.29 ([**GS00**]). *Sei κ eine Kardinalzahl. Wenn F κ-Pullbacks erhält, dann erhält F κ-mono-sourcen.*

BEWEIS. Wir müssen nur zeigen, daß F mono-sourcen der Form $(\prod_{j<\kappa} X_j, (\pi_j : \prod_{i<\kappa} X_i \to X_j)_{j<\kappa})$ erhält. Das folgt aber daraus, daß folgendes Diagramm ein κ-Pullback ist

$$\begin{tikzcd}
\prod_{j<\kappa} X_j \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, "\pi_{i'}"'] & X_i \arrow[d] \\
X_{i'} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

und F diesen κ-Pullback erhält, ihn also insbesondere in einen κ-mono-source verwandelt. $\square$

Wir zitieren noch:

SATZ 4.30 ([**Trn71a**]). *Das Erhalten von κ-mono-sourcen setzt sich auf Unterfunktoren fort. Wenn F endliche mono-sourcen erhält, dann erhält F Equalizer. Insbesondere erhält jeder Funktor, der Pullbacks erhält, auch Equalizer. Wenn F κ-mono-sourcen für eine Kardinalzahl κ erhält, dann erhält F auch κ-Schnitte.*

6. Schwache Pullbacks und Coalgebren

In diesem Abschnitt klären wir zunächst, was es für die Coalgebren eines Funktors F bedeutet, daß F schwache Pullbacks erhält, und beweisen dann, daß das Erhalten von schwachen Pullbacks äquivalent zum schwachen Erhalten von Kernen und von Urbildern ist.

Hauptsatz 4.31 ([**GS00**]). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *F erhält schwache Pullbacks.*
2. *Für alle F-Homomorphismen $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ und $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ist der Pullback* $\mathrm{pb}(\varphi, \psi)$ *der Abbildungen φ und ψ in* **Set** *eine Bisimulation zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.*
3. *Das Relationenproduct $R \circ S$ von je zwei F-Bisimulationen R und S ist eine Bisimulation.*
4. *Für alle F-Homomorphismen $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ und alle Bisimulationen R zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist*

$$(\varphi, \psi)^{-}[R] := \{(a, b) \in A \times B \mid (\varphi a) R (\psi b)\}$$

eine Bisimulation zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Beweis. Die Implikationen (1)$\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) sind aus [**Rut00b**]. Die Äquivalenz (1) $\iff$ (2) folgt direkt aus Hauptsatz 4.21, wenn man beachtet, daß wir nach Korollar 4.14 für (2)$\Rightarrow$(1) nur zeigen müssen, daß F nicht-leere Pullbacks schwach erhält.

(2)$\Rightarrow$(3): Seien R bzw. S Bisimulationen zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ bzw. zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Der Pullback der Projektionen $\pi_2^R : R \to B$ und $\pi_1^S : S \to B$ ist

$$R \bowtie S := \{((a, b), (b, c)) \mid (a, b) \in R, (b, c) \in S\}.$$

Nach Voraussetzung können wir darauf eine Coalgebra-Struktur finden, die $\pi_1^R \circ \pi_1$ und $\pi_2^S \circ \pi_2$ zu Homomorphismen macht. $R \circ S$ ist aber gerade $(\pi_1^R \circ \pi_1, \pi_2^S \circ \pi_2)(R \bowtie S)$, die kanonische Bisimulation dieses 2-sources.

$$\begin{tikzcd}
 & & R \bowtie S \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, two heads] & & R \circ S \arrow[ddllll, bend right] \arrow[dd] \\
 & R \arrow[dl, "\pi_1^R"'] \arrow[dr] & & S \arrow[dl] \arrow[dr, "\pi_2^S"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}$$

(3)$\Rightarrow$(4) gilt wegen

$$(\varphi, \psi)^{-}[R] = (\mathrm{Gr}\,\varphi) \circ R \circ (\mathrm{Gr}\,\psi)^{-},$$

während man (4)$\Rightarrow$(1) aus $\mathrm{pb}(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)^{-}(\Delta_C)$ erhält.

Das folgende Diagramm zeigt die Situation:

$$\begin{tikzcd}
 & C & & D & \\
A \arrow[ur, "\varphi"] & & R \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[ur, "\pi_2"] & & B \arrow[ul, "\psi"'] \\
 & \bullet \arrow[ul] \arrow[ur, "\varphi'"] & & \bullet \arrow[ul, "\psi'"'] \arrow[ur] & \\
 & & P \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

wobei "$\bullet$" das Nehmen des Pullbacks anzeigt und $P = (\varphi, \psi)^{-}[R] = \mathrm{pb}(\varphi', \psi')$ ist. $\square$

Dieser Satz impliziert, daß Bisimilarität eine transitive Relation ist, wenn F schwache Pullbacks erhält, d.h.: Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{Set}_F$ Coalgebren, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, so folgt aus $a \sim_{\mathcal{A},\mathcal{B}} b$ und $b \sim_{\mathcal{B},\mathcal{C}} c$ schon $a \sim_{\mathcal{A},\mathcal{C}} c$. Wir beweisen noch:

Behauptung 4.32 ([**Rut00b**]). *F erhalte schwache Pullbacks, und es existiere eine terminale F-Coalgebra $\mathfrak{T}(1)$. Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{Set}_F$ zwei F-Coalgebren, $a \in A$, $b \in B$, so gilt: $a \sim b \iff !_{\mathcal{A}}(a) = !_{\mathcal{B}}(b)$, wobei $!_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathfrak{T}(1)$ bzw. $!_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathfrak{T}(1)$ die eindeutigen Homomomorphismen sind.*

Beweis. Bisimilarität ist eine transitive Relation, da F schwache Pullbacks erhält. Aus $a \sim b$ folgt somit $!_{\mathcal{A}}(a) \sim !_{\mathcal{B}}(b)$, und Satz 3.55 zeigt $!_{\mathcal{A}}(a) = !_{\mathcal{B}}(b)$. Umgekehrt folgt aus

$$a \sim !_{\mathcal{A}}(a) = !_{\mathcal{B}}(b) \sim b,$$

daß $a \sim b$ gilt.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, mapsto] & & b \arrow[dl, mapsto] \\ & !_{\mathcal{A}}(a) = !_{\mathcal{B}}(b) & \end{tikzcd}$$

□

In Satz 3.21.(4) haben wir gesehen, daß $a \in A$ und $b \in B$ genau dann bisimilar sind, wenn es eine Coalgebra $\mathcal{Q}$, ein $q \in Q$ und zwei Homomorphismen $\varphi : \mathcal{Q} \to \mathcal{A}$, $\psi : \mathcal{Q} \to \mathcal{B}$ mit $\varphi q = a$, $\psi q = b$ gibt, wenn also a und b ein "gemeinsames homomorphes Urbild" haben. Dieser Satz zeigt, daß das Erhalten von schwachen Pullbacks durch F und die Existenz einer terminalen F-Coalgebra implizieren, daß a und b auch genau dann bisimilar sind, wenn sie ein "gemeinsames homomorphes Bild" besitzen.

Bemerkung 4.33. Jeder Funktor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ läßt sich auf kanonische Weise zu einer Operation $\tilde{F} : \mathbf{Rel} \to \mathbf{Rel}$ auf der Kategorie $\mathbf{Rel}$ der Relationen fortsetzen (die Objekte von $\mathbf{Rel}$ sind die Mengen, die Morphismen die binären Relationen, die Komposition von Morphismen das Relationenprodukt). Wir setzen zur Vereinfachung der Notation voraus, daß F standard ist. Für Mengen A setzt man $\tilde{F}A := FA$. Ist $R \subseteq A \times B$ eine Relation mit den Projektionen $\pi_A : R \to A$, $\pi_B : R \to B$, so definiert man

$$\tilde{F}R := (F\pi_A, F\pi_B)[FR] \subseteq FA \times FB.$$

Es gilt, wie in verschiedenen Varianten von Trnková in [**Trn77**], Thijs in [**Thi96**], Carboni, Kelly und Wood in [**CKW90**] sowie Adámek und Trnková in [**AT90**] bewiesen wird: F erhält genau dann schwache Pullbacks, wenn $\tilde{F}$ ein Funktor ist, was genau dann der Fall ist, wenn immer $\tilde{F}(R \circ Q) \supseteq \tilde{F}(R) \circ \tilde{F}(Q)$ gilt. Dies wird in [**Rut98b**] coalgebraisch interpretiert.

Wenn F schwache Pullbacks erhält, so erhält F offensichtlich auch Kerne schwach und erhält Urbilder. Wir beweisen jetzt, daß umgekehrt aus dem schwachen Erhalten von Kernen und dem Erhalten von Urbildern das schwache Erhalten von Pullbacks folgt. Dazu zeigen wir zunächst, daß das Erhalten von Urbildern es erlaubt, aus dem (schwachen) Erhalten eines Pullbacks auf das (schwache) Erhalten von "kleineren" Pullbacks zu schließen:

Lemma 4.34. *Der Funktor F erhalte Urbilder. Dann gilt für alle Abbildungen $f : A \to C$, $g : B \to C$ mit gleichem Wertebereich und alle Teilmengen $U \subseteq A$, $V \subseteq B$:*

- *Wenn F den Pullback von f mit g schwach erhält, dann erhält F auch den Pullback von $f\circ \subseteq^A_U$ mit $g\circ \subseteq^B_V$ schwach.*
- *Wenn F den Pullback von f mit g erhält, dann erhält F auch den Pullback von $f\circ \subseteq^A_U$ mit $g\circ \subseteq^B_V$.*

Beweis. Wir beweisen die erste Aussage, der Beweis der zweiten erfolgt analog. Der Pullback von $f\circ \subseteq^A_U$ mit g ist das Urbild von U unter der Abbildung $\pi_A : \mathrm{pb}(f,g) \to A$. Wendet man Lemma 4.7 auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_A^-[U] \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\pi_A|"'] & \mathrm{pb}(f,g) \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\
U \arrow[r, "\subseteq^A_U"'] & A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

an, erhält man, daß F den Pullback von $f\circ \subseteq^A_U$ mit g schwach erhält, und durch nochmalige Anwendung dieses Arguments folgt die Behauptung. $\square$

Daraus erhalten wir jetzt:

Satz 4.35. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *F erhält Pullbacks (bzw. Pullbacks schwach).*
(2) *F erhält Kerne (bzw. Kerne schwach) und erhält Urbilder.*

Beweis. (1)$\Rightarrow$(2) ist offensichtlich.

(2)$\Rightarrow$(1): Wir setzen voraus, daß F Kerne schwach erhält und Urbilder erhält. Seien $f : A \to C$, $g : B \to C$ zwei Abbildungen mit gleichem Wertebereich. Nach Voraussetzung erhält F den Kern der Abbildung $[f,g] : A + B \to C$ schwach, und die zweimalige Anwendung von Lemma 4.34 zeigt, daß F den Pullback von $f = [f,g]\circ \subseteq^{A+B}_A$ mit $g = [f,g]\circ \subseteq^{A+B}_B$ schwach erhält. Das folgende Diagramm verdeutlicht dies:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pb}(f,g) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ker}[f,g] \cap A \times (A+B) \arrow[r] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\
\mathrm{Ker}[f,g] \cap (A+B) \times B \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Ker}[f,g] \arrow[r] \arrow[d] & A+B \arrow[d, "{[f,g]}"] \\
B \arrow[r, hook] & A+B \arrow[r, "{[f,g]}"'] & C
\end{tikzcd}$$

Wenn F sogar Kerne und Urbilder erhält, zeigt ein analoger Beweis die Behauptung. $\square$

Für den Fall von (strikten) Pullbacks hat Peter Freyd in der Kategorientheorie-Mailingliste ([**ftp**]) einen alternativen Beweis angegeben, der ausnutzt, daß der Funktor $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}/F1$ von $\mathbf{Set}$ in die Quotientenkategorie $\mathbf{Set}/F1$ Pullbacks erhält, man also annehmen kann, daß $F1 = 1$ gilt. Damit ist dann für (2)$\Rightarrow$(1) nur noch zu zeigen, daß F endliche Produkte erhält, denn jeder Funktor, der endliche Produkte und das terminale Objekt erhält, erhält alle endlichen Limites und somit auch Pullbacks (s. z.B. [**HS73**]). Im Fall von schwachen Pullbacks steht ein solches Argument nicht zur Verfügung (s. Bemerkung 4.12).

7. Unendliche Schnitte

Wir haben in Satz 3.32 gesehen, daß der endliche Schnitt von Untercoalgebren immer eine Untercoalgebra ist, und daß der Grund dafür ist, daß F endliche Schnitte erhält. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit unendlichen Schnitten. Aus Korollar 4.27 erhalten wir:

SATZ 4.36 ([**GS00**]). *Für jede Kardinalzahl κ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *F erhält κ-Schnitte.*
- *Der Schnitt jeder κ-indizierten Familie von F-Untercoalgebren ist eine F-Untercoalgebra.*

Beispiel 4.37: Polynomiale Funktoren, der Potenzmengenfunktor $\mathcal{P}$ und der Funktor $(-)^3_2$ erhalten beliebige Schnitte; der Filterfunktor $\mathcal{F}$ erhält ω-Schnitte *nicht.*

Dieser Satz liefert einen coalgebraischen Beweis folgenden Resultates aus [**Trn71a**]:

KOROLLAR 4.38. *Sei κ eine Kardinalzahl. Wenn F κ-Schnitte erhält, so auch jeder Unterfunktor von F.*

BEWEIS. Seien G ein Unterfunktor von F, $\nu : G \hookrightarrow F$ die Einbettungstransformation, $\nu\circ(-) : \mathbf{Set}_G \to \mathbf{Set}_F$ der induzierte Funktor, $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_G$ eine G-Coalgebra. Nach Satz 4.16 stimmen die Untercoalgebren von $\mathcal{A}$ mit denen von $\nu(\mathcal{A})$ überein, und da die Untercoalgebren von $\nu(\mathcal{A})$ gegen κ-Schnitte abgeschlossen sind, gilt dies auch für die Untercoalgebren von $\mathcal{A}$. $\square$

Wenn F beliebige Schnitte erhält, sind also Schnitte von beliebig vielen Untercoalgebren einer Coalgebra wieder Untercoalgebren. Folglich gibt es für jedes Element einer Coalgebra eine kleinste Untercoalgebra, die dieses Element enthält. Wir definieren:

DEFINITION 4.39 (einserzeugt). $\mathcal{A}$ heißt *einserzeugt von einem $a \in A$*, wenn $\mathcal{A}$ die einzige Untercoalgebra von $\mathcal{A}$ ist, die a enthält. $\mathbf{Set}_F$ *hat Einserzeugte*, wenn es für jede F-Coalgebra $\mathcal{A}$ und jedes Element $a \in A$ eine von a einserzeugte Untercoalgebra $\langle a \rangle$ gibt.

Beispiel 4.40: $\mathbf{Set}_{\mathcal{P}}$ hat Einserzeugte. Für alle Mengen C, M hat $\mathbf{Set}_{C\times(-)^M}$ Einserzeugte.

Die genaue Beziehung zwischen Schnitterhaltung und Einserzeugten ist:

LEMMA 4.41. *Für einen Funktor F sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *F erhält beliebige Schnitte.*
(2) *Beliebige Schnitte von F-Untercoalgebren sind F-Untercoalgebren.*
(3) *Für jede F-Coalgebra $\mathcal{A}$ und jede Teilmenge $U \subseteq A$ gibt es eine kleinste Untercoalgebra $\langle U \rangle$, die U umfaßt, die* von U erzeugte Untercoalgebra.
(4) $\mathbf{Set}_F$ *hat Einserzeugte.*

BEWEIS. Die Äquivalenz (1) $\iff$ (2) folgt direkt aus Satz 4.36, (2)$\Rightarrow$(3) ergibt sich aus $\langle U \rangle = \bigcap\{V \leq \mathcal{A} \mid U \subseteq V\}$. (3)$\Rightarrow$(4) ist offensichtlich, (4)$\Rightarrow$(2): Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von F-Untercoalgebren von $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$, so ist $\bigcap_{i\in I} U_i = \bigcup_{u\in\bigcap_{i\in I} U_i} \langle u \rangle$ eine Untercoalgebra. $\square$

Man kann auch einen Zusammenhang zu den Filtern $\mathfrak{F}(A, u)$ (s. Definition 3.29 und Satz 3.30) herstellen.

LEMMA 4.42 ([**Trn71a**]). *Sei κ eine Kardinalzahl. Dann erhält F genau dann κ-Schnitte, wenn für jedes $A \in$ $\mathbf{Set}$ und jedes $u \in FA$ der Filter $\mathfrak{F}(A, u)$ gegen κ-Schnitte abgeschlossen ist.*

SATZ 4.43. *Für jede Menge A sei ν_A die Abbildung*

$$\nu_A : FA \to \mathcal{F}(A), u \mapsto \mathfrak{F}(A, u),$$

wobei $\mathcal{F}$ der Filterfunktor ist (s. Beispiel 3.6). Dann ist

$$\nu := (\nu_A : FA \to \mathcal{F}(A))_{A \in \mathbf{Set}}$$

in allen Injektionen kartesisch. Insbesondere stimmen die F-Untercoalgebren jeder F-Coalgebra $\mathcal{A}$ mit den $\mathcal{F}$-Untercoalgebren von $\nu(\mathcal{A}) \in \mathbf{Set}_{\mathcal{F}}$ überein.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß für alle Mengen A und alle Mengen $U \subseteq A$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} FU \arrow[r, "F(\subseteq_U^A)"] \arrow[d, "\nu_U"'] & FA \arrow[d, "\nu_A"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\mathcal{F}(\subseteq_U^A)"'] & \mathcal{F}(A) \end{tikzcd}$$

ein Pullback ist. Wir zeigen zunächst, daß es kommutiert. Sei $u \in FU$ gegeben. Wir müssen

$$\{V \subseteq A \mid V \cap U \in \mathfrak{F}(U,u)\} = \mathfrak{F}(A, F(\subseteq_U^A)u)$$

nachweisen. Ist ein $V \subseteq A$ gegeben mit $V \cap U \in \mathfrak{F}(U,u)$, d.h.

$$u \in F(\subseteq_{V\cap U}^U)[F(V \cap U)],$$

dann gilt auch

$$F(\subseteq_U^A)u \in F(\subseteq_U^A)[F(\subseteq_{V\cap U}^U)[F(V \cap U)]] = F(\subseteq_{V\cap U}^A)[F(V \cap U)],$$

somit $V \supseteq V \cap U \in \mathfrak{F}(A, F(\subseteq_U^A)u)$. Umgekehrt sei $V \in \mathfrak{F}(A, F(\subseteq_U^A)u)$ gegeben, also $F(\subseteq_U^A)u \in F(\subseteq_V^A)[FV]$. Das bedeutet aber, daß ein $v \in FV$ existiert mit

$$F(\subseteq_U^A)u = F(\subseteq_V^A)v.$$

Da F den Schnitt von U mit V erhält, existiert ein $z \in F(U \cap V)$ mit $F(\subseteq_{U\cap V}^U)z = u$. Das zeigt aber $U \cap V \in \mathfrak{F}(U,u)$, also die Behauptung.

Damit haben wir die Kommutativität des Diagramms bewiesen, und es bleibt zu zeigen, daß es ein Pullback ist. Dazu seien ein Filter $\mathfrak{u} \in \mathcal{F}(U)$ und ein $v \in FA$ gegeben mit

$$\mathfrak{F}(A,v) = \{V \subseteq A \mid V \cap U \in \mathfrak{u}\}.$$

Wir müssen zeigen, daß $v = F(\subseteq_U^A)u$ für ein $u \in FU$ gilt. Das folgt aber sofort daraus, daß $U \in \mathfrak{u}$ gilt, also auch $U \in \mathfrak{F}(A,v)$, und folglich $v \in F(\subseteq_U^A)[FU]$.

"Insbesondere" folgt aus Satz 4.16. □

In [**Trn71a**] wird die oben definierte Familie $\nu = (\nu_A)_{A \in \mathbf{Set}}$ ebenfalls betrachtet und bewiesen, daß F genau dann Urbilder erhält, wenn ν eine natürliche Transformation ist.

In einem Spezialfall erhält man mit Hilfe von Lemma 4.42 eine noch übersichtlichere Beschreibung:

Korollar 4.44. *F erhalte beliebige Schnitte. Dann ist für jede Menge A durch*

$$\nu_A : FA \to \mathcal{P}(A), u \mapsto \bigcap \mathfrak{F}(A,u)$$

eine Transformation $F \to \mathcal{P}$ gegeben, die in allen Injektionen kartesisch ist. Insbesondere stimmt die Untercoalgebrenstruktur jeder F-Coalgebra $\mathcal{A}$ mit der Untercoalgebrenstruktur des Transitionssystems $\nu(\mathcal{A}) \in \mathbf{Set}_{\mathcal{P}}$ überein.

Bemerkung 4.45. Satz 3.32 zeigt, daß die Untercoalgebren einer F-Coalgebra $\mathcal{A}$ die offenen Mengen einer Topologie auf A sind. Inbesondere erhält man eine $\mathcal{F}$-Coalgebra $(A, \gamma_A : A \to \mathcal{F}(A))$, indem man

$$\gamma_A(a) := \{U \subseteq A \mid \exists V \leq A.a \in V \subseteq U\}$$

setzt. Diese $\mathcal{F}$-Coalgebra stimmt i.a. nicht mit der in Satz 4.43 konstruierten $\mathcal{F}$-Coalgebra $\nu(\mathcal{A}) = (A, \nu_A \circ \alpha_A)$ überein, für die $(\nu_A \circ \alpha_A)(a) = \mathfrak{F}(A, \alpha_A a)$ definiert war. Das sieht man z.B. an der $\mathcal{P}$-Coalgebra

$$\mathcal{A} := \begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, bend left] & a_2 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

denn es gilt

$$\mathfrak{F}(A, \alpha_A a_1) = \mathfrak{F}(A, \{a_2\}) = \{U \subseteq A \mid a_2 \in U\} = \{\{a_2\}, A\},$$

aber

$$\gamma_A(a_1) = \{A\}.$$

8. Urbilder

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie sich das Erhalten von Urbildern durch F durch Eigenschaften der F-Coalgebren charakterisieren läßt. Nach Korollar 4.14 können wir dabei leere Urbilder ignorieren, und nach Lemma 4.6 erhält F ein Urbild genau dann, wenn es dieses Urbild schwach erhält. Korollar 4.27 zeigt, daß Urbilder, d.h. Pullbacks entlang injektiver Homomorphismen, in $\mathbf{Set}_F$ immer existieren. Genauer:

Satz 4.46. *Seien $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein F-Homomorphismus, $\mathcal{V} \leq \mathcal{B}$ eine Untercoalgebra. Dann ist der Pullback von φ entlang $\subseteq^B_V$ gegeben durch $[\varphi^-[V]]$, ist also die größte Untercoalgebra von $\mathcal{A}$, die in $\varphi^-[V]$ enthalten ist. Genau dann erhält F Urbilder, wenn immer $[\varphi^-[V]] = \varphi^-[V]$ gilt.*

$$\begin{tikzcd} {[\varphi^-[V]]} \arrow[r, hook, "\leq"] \arrow[d, "\varphi|"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathcal{V} \arrow[r, hook, "\leq"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

Es gibt einen Typ von Urbildern, die jeder Funktor F erhält: Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, $V \subseteq B$ eine Teilmenge, für die $f^-[V] = A$ gilt, so erhalten wir folgendes Pullback-Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "f^{|V}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, hook, "\subseteq"'] & B, \end{tikzcd}$$

und man prüft leicht nach, daß F diesen Pullback erhält. Damit können wir jetzt die Erhaltung von Urbildern charakterisieren:

Hauptsatz 4.47 ([**GS00**]). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *F erhält Urbilder.*
(2) *Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, $V \subseteq B$ eine Teilmenge, für die $\emptyset \neq f^-[V] \neq A$ gilt, so erhält F das Urbild von V unter f.*
(3) *Ist $\mathcal{V} \leq \mathcal{B}$ und R eine Bisimulation zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, dann ist*

$$R^-[V] := \{a \in A \mid \exists v \in V.(a, v) \in R\}$$

eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$.

(4) *Ist* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *ein Homomorphismus und* $\mathcal{V} \leq \mathcal{B}$ *eine Untercoalgebra, dann ist* $\varphi^{-1}[V]$ *eine Untercoalgebra von* $\mathcal{A}$.

(5) *Ist* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *ein Homomorphismus und* $\mathcal{V} \leq \mathcal{B}$ *eine Untercoalgebra, dann ist* $\varphi^{-1}[V] = [\varphi^{-1}[V]]$.

(6) *Für* $\mathcal{U} \leq \mathcal{A}, \mathcal{V} \leq \mathcal{B}$ *sind die Bisimulationen zwischen* $\mathcal{U}$ *und* $\mathcal{V}$ *genau die Bisimulationen zwischen* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$*, eingeschränkt auf* $U \times V$.

Beweis. (1) $\iff$ (2) folgt aus Korollar 4.14 und der Diskussion vor dem Hauptsatz.

(1)$\Rightarrow$(3): F erhalte Urbilder, und $R \subseteq A \times B$ sei eine Bisimulation. Der Pullback von $\leq : V \to B$ und $\pi_2^R : R \to B$ in **Set** ist $Q = \{(v,(a,v)) \mid v \in V, (a,v) \in R\}$. Nach Voraussetzung ist Q eine Bisimulation, wir erhalten also eine Strukturabbildung auf Q, für die $\pi_2^Q : Q \to R$ und somit auch $\pi_1^R \circ \pi_2^Q : Q \to A$ Homomorphismen sind. Das Bild dieses Homomorphismus, $R^-[V]$, ist somit eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$.

(3)$\Rightarrow$(4) ist eine Spezialisierung mit $R = \operatorname{Gr}\varphi$, und (4)$\Rightarrow$(2) folgt aus Hauptsatz 4.21; (4) $\iff$ (5) ist offensichtlich.

(1)$\Rightarrow$(6): Jede Bisimulation zwischen $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ ist offenbar ein Bisimulation zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Umgekehrt sei R eine Bisimulation zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Dann gilt

$$R \cap (U \times V) = (\subseteq_U^A, \subseteq_V^B)^-[R].$$

Der Beweis von Hauptsatz 4.31 zeigt, daß dies eine Bisimulation ist, da F Pullbacks entlang injektiver Abbildungen erhält und Pullbacks von injektiven Abbildungen injektiv sind.

(6)$\Rightarrow$(4): Seien $\mathcal{V} \leq \mathcal{B}$ eine Untercoalgebra, $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein F-Homomorphismus. Da

$$(\operatorname{Gr}\varphi) \cap (A \times V) = \{(a, \varphi a) | \varphi a \in V\}$$

nach Voraussetzung eine Bisimulation ist, ist

$$\pi_1 : (\operatorname{Gr}\varphi) \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{V}) \to \mathcal{A}$$

ein F-Homomorphismus, dessen Bild gerade $\varphi^{-1}[V]$ ist, was daher eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$ ist. □

Beispiel 4.48: Wir definieren einen Funktor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ wie folgt: Für eine Menge A setzen wir $FA := \mathcal{P}(A)$, für eine Abbildung $f : A \to B$ definieren wir

$$(Ff)(U) := \begin{cases} f[U] & \text{wenn } f_{|U} \text{ injektiv} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann stimmen $\mathbf{Set}_F$ und $\mathbf{Set}_{\mathcal{P}}$ auf den Objekten überein, d.h., jede F-Coalgebra ist eine $\mathcal{P}$-Coalgebra und umgekehrt, und auch die Begriffe von Untercoalgebra stimmen überein.

Wir betrachten die F-Coalgebren $\mathcal{A} = (\{a_1, a_2, a_3\}, \alpha_A)$ und $\mathcal{B} = (\{b_1, b_2\}, \alpha_B)$ mit $\alpha_A a_1 := \{a_2, a_3\}$, $\alpha_A a_2 := \alpha_A a_3 := \emptyset$ und $\alpha_B b_1 := \alpha_B b_2 := \emptyset$. Im Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & a_2 & b_1 \\ a_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & a_3 & b_2 \end{tikzcd}$$

Dann ist durch $\varphi(a_1) := b_1$ und $\varphi(a_2) := \varphi(a_3) := b_2$ ein Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definiert, aber $\varphi^-(\{b_1\}) = \{a_1\}$ ist keine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$.

Jetzt geben wir eine weitere Eigenschaft an, die äquivalent zur Urbilderhaltung von F ist. In der Kategorie **Set** induziert jede Abbildung $f : A \to B + C$, deren Wertebereich eine Summe ist, eine Zerlegung des Definitionsbereichs: $A = f^-[B]+$

$f^-[C]$. Ist $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B} + \mathcal{C}$ ein F-Homomorphismus in eine Summe von zwei Coalgebren und erhält F Urbilder, so haben wir ebenfalls eine Zerlegung

$$\mathcal{A} = \varphi^-[\mathcal{B}] + \varphi^-[\mathcal{C}].$$

Die gleiche Konstruktion ist für Abbildungen bzw. Homomorphismen in unendliche Summen möglich, und es stellt sich heraus, daß die Existenz solcher Zerlegungen in der Tat äquivalent dazu ist, daß F Urbilder erhält:

Satz 4.49 ([**GHS01**]). *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *F erhält Urbilder.*
(2) *Jeder F-Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \sum_{i\in I} \mathcal{B}_i$ induziert eine Zerlegung seines Definitionsbereiches, d.h., es gibt Untercoalgebren $\mathcal{U}_i \leq \mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} = \sum_{i\in I} \mathcal{U}_i$, so daß $\varphi[U_i] \subseteq B_i$ für jedes $i \in I$ gilt (es gilt dann notwendigerweise $U_i = \varphi^-[B_i]$).*
(3) *Jeder F-Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B} + \mathcal{C}$ induziert eine Zerlegung seines Definitionsbereiches, d.h., es gibt Untercoalgebren $\mathcal{U}_B, \mathcal{U}_C \leq \mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{U}_B + \mathcal{U}_C$, $\varphi[U_B] \subseteq B$ und $\varphi[U_C] \subseteq C$ (in diesem Fall gilt offenbar $U_B = \varphi^-[B]$ und $U_C = \varphi^-[C]$).*

Beweis. (1)$\Rightarrow$(2) haben wir schon vor dem Satz diskutiert, (2)$\Rightarrow$(3) ist offensichtlich, so daß wir nur (3)$\Rightarrow$(1) zeigen müssen. Wir überprüfen hierzu die zweite Bedingung von Hauptsatz 4.47: Seien also $f : A \to B$ eine Abbildung, $V \subseteq B$ eine Teilmenge mit $\emptyset \neq f^-[V] \neq A$, $x \in FA$, $y \in FV$ mit $(Ff)x = F(\subseteq^B_V)y$.

Da $f^-[\complement V] = \complement(f^-[V])$ gilt, wobei $\complement V$ das Komplement von V in B ist, können wir ein $v \in F(f^-[\complement V])$ wählen. Wir definieren Coalgebren-Strukturen α_A auf A und α_B auf B durch

$$\alpha_A a := \begin{cases} x & \text{für } a \in f^-[V] \\ F(\subseteq^A_{f^-[\complement V]})v & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\alpha_B b := \begin{cases} (Ff)x & \text{für } b \in V \\ (Ff)(F \subseteq^A_{f^-[\complement V]})v & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $a \in A$ und $b \in B$. Bezüglich dieser Strukturen ist f ein Homomorphismus $(A, \alpha_A) \to (B, \alpha_B)$, und V sowie $\complement V$ sind Untercoalgebren von (B, α_B), wie man leicht nachrechnet. Aber daraus folgt $\mathcal{B} = \mathcal{V} + \complement\mathcal{V}$ in $\mathbf{Set}_F$, d.h., f ist in der Tat ein Homomorphismus $(A, \alpha_A) \to \mathcal{V} + \complement\mathcal{V}$, so daß $[f^-[V]] = f^-[V]$ nach Voraussetzung gilt. Folglich finden wir eine Coalgebrenstruktur $\rho : f^-[V] \to F(f^-[V])$, die $\subseteq^A_{f^-[V]}$ zu einem Homomorphismus macht. Dann ist $z := \rho(u)$ für ein beliebiges $u \in f^-[V]$ das gesuchte Element, da

$$F(\subseteq^A_{f^-[V]})z = F(\subseteq^A_{f^-[V]})(\rho u) = \alpha_A(\subseteq^A_{f^-[V]} u) = x$$

gilt. Im Diagramm:

$$\begin{tikzcd} f^-[V] \arrow[r, hook] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] & f^-[\complement V] \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ V \arrow[r, hook] & B = V + \complement V & \complement V \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

$\square$

Dieser Satz liefert einen coalgebraischen Beweis (analog zum Beweis von Korollar 4.38) eines Resultats aus [**Trn71a**]:

Korollar 4.50. *Das Erhalten von Urbildern setzt sich auf Unterfunktoren fort.*

In Abschnitt 5.8 werden wir diesen Satz anwenden, um zu zeigen, daß in $\mathbf{Set}_F$ Produkte über Summen distribuieren, wenn F Urbilder erhält. Dort werden wir auch weitere Eigenschaften kennenlernen, die äquivalent zur Urbilderhaltung sind.

Man kann Satz 4.49 so umformulieren: F erhält genau dann Urbilder, wenn für jedes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "h"] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B, \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{Set}_F$ gilt: Sind die zwei Quadrate Pullbacks und die untere Zeile eine Summe, dann ist die obere Zeile eine Summe. In anderen Worten ([**Bor94a**]): F erhält genau dann Urbilder, wenn Summen in $\mathbf{Set}_F$ *universell* sind. Man sieht leicht, daß umgekehrt gilt: Erhält F Urbilder und sind die obere und die untere Zeile des Diagramms Summen, so sind die beiden Quadrate Pullbacks. Damit haben wir bewiesen, daß $\mathbf{Set}_F$ genau dann *extensiv* (Carboni et al. [**CLW93**]) ist, wenn F Urbilder erhält.

Zum Abschluß untersuchen wir noch, welche Auswirkungen die Erhaltung von Urbildern auf den Zusammenhang zwischen der größten Kongruenz und der größten Bisimulation auf einer Coalgebra hat.

SATZ 4.51 ([**GS00**]). *Wenn F Urbilder erhält, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $\sim_{\mathcal{A}}$ *ist für jedes* $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ *transitiv.*
2. $\nabla_{\mathcal{A}} = \sim_{\mathcal{A}}$ *für alle* $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$*, wobei* ∇_A *die größte Kongruenz auf* $\mathcal{A}$ *ist (s. Behauptung 3.42).*

BEWEIS. $\nabla_{\mathcal{A}}$ ist immer transitiv, also ist (2)⇒(1) offensichtlich.

Um (1)⇒(2) zu zeigen, betrachten wir $a, a' \in A$ mit $a \nabla_{\mathcal{A}} a'$ und zeigen $a \sim_{\mathcal{A}} a'$: Sei $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\nabla_{\mathcal{A}}$ die kanonische Projektion. Wir betrachten die Summe $\mathcal{S} := \mathcal{A} + \mathcal{A}/\nabla_{\mathcal{A}} + \mathcal{A}$ mit den kanonischen Einbettungen ι_1, ι_2 und ι_3. π induziert einen Endomorphismus $\psi := [(\iota_2 \circ \pi), \iota_2, (\iota_2 \circ \pi)]$ auf $\mathcal{S}$ mit

$$\psi \circ \iota_1 = \iota_2 \circ \pi = \psi \circ \iota_3.$$

Da der Graph von ψ und sein Inverses in $\sim_{\mathcal{S}}$ enthalten sind, erhalten wir

$$\iota_1(a) \sim_S \psi(\iota_1(a)) = \iota_2(\pi(a)) = \iota_2(\pi(a')) = \psi(\iota_3(a')) \sim_S \iota_3(a').$$

Es ist leicht zu sehen, daß $\iota_1(x) \sim_S \iota_3(x)$ für jedes $x \in A$ gilt, insbesondere $\iota_3(a') \sim_{\mathcal{S}} \iota_1(a')$. Nach Voraussetzung ist $\sim_{\mathcal{S}}$ transitiv, so daß mit obigem $\iota_1(a) \sim_{\mathcal{S}} \iota_1(a')$ folgt. Hauptsatz 4.47 ermöglicht uns nun, $a \sim_{\mathcal{A}} a'$ zu schließen. □

Man beachte, daß dieser Satz nicht aussagt, daß daraus, daß ein $\sim_{\mathcal{A}}$ transitiv ist, schon folgt, daß $\sim_{\mathcal{A}} = \nabla_{\mathcal{A}}$ ist. Ein Gegenbeispiel für diese stärkere Aussage ist:

Beispiel 4.52: In Beispiel 3.45 haben wir eine $(-)^3_2$-Coalgebra $\mathcal{A}$ mit einem Homomorphismus in die (einzige) einelementige $(-)^3_2$-Coalgebra 1 konstruiert, für die $\sim_{\mathcal{A}}$ die Diagonale auf $\mathcal{A}$ ist. Insbesondere ist $\sim_{\mathcal{A}}$ transitiv, aber es gilt $\nabla_A = A \times A \neq \sim_A$, obwohl der Funktor $(-)^3_2$ Urbilder erhält.

Unter Wiederverwendung dieses Gegenbeispiels können wir eine $(-)^3_2$-Coalgebra konstruieren, auf der die größte Bisimulation nicht transitiv ist: Der Beweis des Hauptsatzes zeigt, daß wir $\mathcal{A} + 1 + \mathcal{A}$ wählen können.

9. Equalizer und monos

In diesem Abschnitt soll zunächst die coalgebraische Bedeutung des Erhaltens von Equalizern untersucht werden. Dann greifen wir die Frage aus Abschnitt 3.7, wann jeder mono injektiv ist, noch einmal auf. Die Korollare 4.27 und 4.14 zeigen:

BEHAUPTUNG 4.53 ([**GS00**]). *Der Equalizer zweier F-Homomorphismen $\varphi, \psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in $\mathbf{Set}_F$ ist die größte Untercoalgebra, die in $\{a \in A \mid \varphi a = \psi a\}$ enthalten ist. F erhält genau dann Equalizer, wenn für alle Coalgebren $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{Set}_F$ und alle Homomorphismen $\varphi, \psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ die Menge $\{a \in A \mid \varphi(a) = \psi(a)\}$ eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$ ist.*

$$\begin{tikzcd} {[\{a \mid \varphi a = \psi a\}]} \arrow[r, hook, "\leq"] & \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

Beispiel 4.54: Polynomiale Funktoren erhalten Equalizer, der Potenzmengenfunktor $\mathcal{P}$ erhält Urbilder (und sogar schwache Pullbacks), erhält aber Equalizer *nicht*. Satz 4.30 wird zeigen, daß aus dem Erhalten von Pullbacks das Erhalten von Equalizern folgt.

Jetzt interpretieren wir die Erhaltung von Equalizern coalgebraisch. Ist $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ eine Coalgebra und $U \subseteq A$, so definieren wir die Menge $\bar{U} := \bigcap\{W \leq \mathcal{A} \mid U \subseteq W\}$. Wenn F beliebige Schnitte erhält, gilt offenbar $\bar{U} = \langle U \rangle$ (s. Lemma 4.41). Mit dieser Notation beweisen wir:

SATZ 4.55. *Wenn F Equalizer erhält, so folgt für alle Homomorphismen $\varphi, \psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und alle Teilmengen $U \subseteq A$ aus $\varphi_{|U} = \psi_{|U}$ schon $\varphi_{|\bar{U}} = \psi_{|\bar{U}}$.*

Weiterhin gilt: Wenn F beliebige Schnitte erhält und für alle Homomorphismen $\varphi, \psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und alle Teilmengen $U \subseteq A$ aus $\varphi_{|U} = \psi_{|U}$ schon $\varphi_{|\bar{U}} = \psi_{|\bar{U}}$ folgt, dann erhält F Equalizer.

BEWEIS. F erhalte Equalizer. Mit obigen Notationen gelte $\varphi_{|U} = \psi_{|U}$. Nach Behauptung 4.53 ist $\{a \in A \mid \varphi a = \psi a\}$ eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$, d.h., es gilt $\bar{U} \subseteq \{a \in A \mid \varphi a = \psi a\}$, was $\varphi_{|\bar{U}} = \psi_{|\bar{U}}$ zeigt.

F erhalte beliebige Schnitte, und die Bedingung des Satzes sei erfüllt. Seien $\varphi, \psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwei Homomorphismen. Wir setzen. $U := \{a \in A \mid \varphi a = \psi a\}$. Dann gilt $\varphi_{|U} = \psi_{|U}$, also nach Voraussetzung auch $\varphi_{|\bar{U}} = \psi_{\bar{U}}$. Das impliziert aber $\bar{U} = U$, und da $\bar{U} = \langle U \rangle$ eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$ ist, ist U eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$, was nach Behauptung 4.53 ausreicht, um nachzuweisen, daß F Equalizer erhält. □

Wir erwähnen noch:

SATZ 4.56 ([**Trn71a**]). *Das Erhalten von Equalizern setzt sich auf Unterfunktoren fort. Wenn F Equalizer erhält, dann erhält F Urbilder.*

Equalizer von zwei F-Homomorphismen sind injektiv, wie wir am Anfang des Abschnittes gesehen haben. Wir zeigen jetzt, daß auch die Umkehrung gilt:

BEHAUPTUNG 4.57 ([**GS01d**]). *Ein mono in $\mathbf{Set}_F$ ist genau dann injektiv, wenn er* regulär *ist, also der Equalizer von zwei Homomorphismen.*

BEWEIS. Ist $i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ ein injektiver Homomorphismus, so bilde man den Pushout $(\mathcal{P}, p_1, p_2)$ von i mit sich selbst. Dann überprüft man leicht, daß i der Equalizer von p_1 und p_2 ist.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "i"'] & \mathcal{B} \arrow[d, hook, "p_1"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, hook, "p_2"'] & \mathcal{P} \end{tikzcd}$$

□

In **Set** - und damit auch in $\mathbf{Set}_F$ - sind Pushouts von injektiven Homomorphismen injektiv ([**HS73**]). Der eben geführte Beweis zeigt daher, daß ein mono in $\mathbf{Set}_F$ genau dann injektiv ist, wenn er der Equalizer von zwei *injektiven* Homomorphismen ist. In Abschnitt 10 werden wir sehen, daß jeder mono in $\mathbf{Set}_F$ injektiv ist, wenn F Kerne schwach erhält.

Behauptung 4.57 zeigt, daß die Untercoalgebren einer Coalgebra $\mathcal{A}$ im kategorientheoretischen Sinne im allgemeinen *nicht* die Unterobjekte von $\mathcal{A}$ in der Kategorie $\mathbf{Set}_F$ sind, d.h. nicht die Äquivalenzklassen von monos mit Ziel $\mathcal{A}$, sondern die *regulären* Unterobjekte von $\mathcal{A}$. Es wäre also kategorientheoretisch exakter, von *regulären* Untercoalgebren zu reden. Da der Begriff der Untercoalgebra aber mit der hier gewählten Definition verbreitet ist und die monos mit Ziel $\mathcal{A}$ bislang keine Bedeutung in der Coalgebra zu haben scheinen, bleiben wir bei der eingeführten Sprechweise.

Um zu untersuchen, wann jeder mono regulär ist, kann man auch untersuchen, wann jeder epi in $\mathbf{Set}_F$ regulär ist, d.h. der Coequalizer von zwei Homomorphismen. Für jeden Morphismus $f : A \to B$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ gilt, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn er ein regulärer mono und ein epi ist, was genau dann der Fall ist, wenn er ein regulärer epi und ein mono ist ([**HS73**]). Da in $\mathbf{Set}_F$ ein Homorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ genau dann mono ist, wenn der epi $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \to \varphi[\mathcal{A}]$, $a \mapsto \varphi(a)$, mono ist, folgt:

Lemma 4.58. *In $\mathbf{Set}_F$ ist genau dann jener mono injektiv, wenn jeder epi regulär ist.*

Die regulären epis in $\mathbf{Set}_F$ lassen sich coalgebraisch charakterisieren:

Satz 4.59. *Für einen surjektiven Homomorphismus $\varphi : \mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathcal{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *φ ist ein regulärer epi.*
2. *Es gibt eine Bisimulation R auf $\mathcal{B}$ mit $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Eq}(R)$.*
3. *Es gilt $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Eq}([\operatorname{Ker}\varphi]_2)$.*

Beweis. (1)$\Rightarrow$(2): Sei φ der Coequalizer in $\mathbf{Set}_F$ von $\psi_1, \psi_2 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Dann gilt $\operatorname{Ker}\varphi \supseteq (\psi_1, \psi_2)[A]$, und da φ auch in **Set** der Coequalizer in ψ_1, ψ_2 ist, folgt

$$\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Eq}((\psi_1, \psi_2)[A]),$$

und da nach Satz 3.21.(2) die Menge $(\psi_1, \psi_2)[A]$ eine Bisimulation ist, folgt (2). (2) $\iff$ (3) ist offensichtlich.

(2)$\Rightarrow$(1): Sei $R \subseteq B \times B$ eine Bisimulation auf $\mathcal{B}$ mit $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Eq}(R)$. Sind $\pi_1, \pi_2 : R \to B$ die Projektionen, so gilt $\varphi \circ \pi_1 = \varphi \circ \pi_2$. Ist $\theta : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ ein Homomorphismus mit $\theta \circ \pi_1 = \theta \circ \pi_2$, so muß $R \subseteq \operatorname{Ker}\theta$ gelten, also auch $\operatorname{Eq}(R) \subseteq \operatorname{Ker}\theta$, d.h., θ faktorisiert nach dem 1. Diagrammlemma (Lemma 3.14) eindeutig durch φ.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & B \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, "\theta"'] & C \arrow[d, dashed] \\ & & D \end{tikzcd}$$

□

Korollar 4.60. *In $\mathbf{Set}_F$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *Jede Kongruenz ist die von einer Bisimulation erzeugte Äquivalenzrelation.*
- *Jeder epi ist regulär.*
- *Jeder mono ist injektiv.*

Wir werden in Hauptsatz 4.61 sehen, daß man dieses Ergebnis noch verbessern kann. Dort werden wir beweisen, daß genau dann jeder mono injektiv ist, wenn jede Kongruenz eine Bisimulation ist.

10. Kerne

In diesem Abschnitt wird untersucht, welche coalgebraische Bedeutung das schwache Erhalten von Kernen durch den Funktor F hat. Wir können nach Korollar 4.14 dabei Kerne von leeren Abbildungen ignorieren.

HAUPTSATZ 4.61. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *F erhält Kerne schwach.*
2. *Jede F-Kongruenz ist eine Bisimulation.*
3. *Jeder mono in $\mathbf{Set}_F$ ist injektiv.*

Der Beweis wird zeigen: Genau dann erhält F den Kern der Abbildung $f : A \to B$ schwach, wenn bzgl. jeder F-Coalgebrenstruktur auf A, für die $\operatorname{Ker} f$ *eine Kongruenz ist,* $\operatorname{Ker} f$ *auch eine Bisimulation ist.*

BEWEIS. Die Äquivalenz (1) $\Longleftrightarrow$ (2) ist aus [**GS00**].

(1)$\Rightarrow$(2): Sei R eine Kongruenz auf der F-Coalgebra $\mathcal{A}$ mit Projektionshomomorphismus $\pi_R : A \twoheadrightarrow A/R$. Wenn F Kerne schwach erhält, dann ist $R = \operatorname{pb}(\pi_R, \pi_R)$ nach Hauptsatz 4.21 eine Bisimulation.

(2)$\Rightarrow$(3): Ist $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mono, so gilt $[\operatorname{Ker}\varphi]_2 = \Delta_A$ nach Satz 3.47. Wenn F Kerne schwach erhält, ist aber $\operatorname{Ker}\varphi$ selbst eine Bisimulation, was $\operatorname{Ker}\varphi = \Delta_A$ zeigt. Also ist φ injektiv.

(3)$\Rightarrow$(1): Wir nehmen an, daß F den Kern von $f : A \to B$ nicht schwach erhält, und beweisen daß es in $\mathbf{Set}_F$ einen nicht injektiven mono gibt.

Wenn F den Kern von f nicht schwach erhält, dann ist $A \neq \emptyset$, f ist nicht injektiv, und es gibt zwei verschiedene Elemente $x, y \in FA$ mit

$$(x, y) \in (\operatorname{Ker} Ff) \backslash (F\pi_1, F\pi_2)[F \operatorname{Ker} f],$$

wobei $\pi_1, \pi_2 : \operatorname{Ker} f \to A$ die kanonischen Projektionen sind. Sei U eine Äquivalenzklasse von $\operatorname{Ker} f$ mit mindestens zwei Elementen. Dann zerlegen wir U irgendwie in zwei nichtleere Mengen U_x und U_y. Auf A definieren wir die Coalgebrenstruktur α_A durch

$$\alpha_A a := \begin{cases} x & \text{für } a \in U_x \\ y & \text{sonst} \end{cases}$$

Auf B definieren wir die konstante Coalgebrenstruktur $\alpha_B^{(Ff)x}$. Dann ist f offensichtlich ein Homomorphismus, also $\operatorname{Ker} f$ eine Kongruenz. Wir zeigen jetzt, daß bzgl. dieser Coalgebrenstrukturen $\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Eq}([\operatorname{Ker} f]_2)$ gilt. Nach Satz 4.59 und Korollar 4.60 beweist das die Existenz eines nicht injektiven mono in $\mathbf{Set}_F$.

Sei $\gamma : [\operatorname{Ker} f]_2 \to F([\operatorname{Ker} f]_2)$ eine Bisimulationsstruktur auf $[\operatorname{Ker} f]_2$. Für beliebige Elemente $u \in U_x$, $v \in U_y$ gilt $(u, v) \notin [\operatorname{Ker} f]_2$, denn ansonsten wäre

$$(F\pi_1, F\pi_2)(\gamma(u, v)) = (\alpha_A u, \alpha_A v) = (x, y).$$

Es ist leicht zu sehen, daß $[\operatorname{Ker} f]_2$ symmetrisch ist, folglich gilt auch $(v, u) \notin [\operatorname{Ker} f]_2$. Somit ist $\operatorname{Ker}(f) \backslash (U_x \times U_y \cup U_x \times U_y)$ eine Äquivalenzrelation, die $[\operatorname{Ker} f]_2$ umfaßt, und es folgt

$$\operatorname{Eq}([\operatorname{Ker} f]_2) \subseteq \operatorname{Ker}(f) \backslash (U_x \times U_y \cup U_y \times U_x)) \subsetneq \operatorname{Ker} f.$$

$\square$

LEMMA 4.62 ([**GS00**]). *Wenn F Kerne schwach erhält, dann ist die größte Bisimulation $\sim_{\mathcal{A}}$ auf jeder Coalgebra $\mathcal{A}$ transitiv, in der Tat ist $\sim_{\mathcal{A}}$ die größte Kongruenz auf $\mathcal{A}$.*

BEWEIS. Hauptsatz 4.61 impliziert, daß jede Kongruenz auf $\mathcal{A}$ in $\sim_{\mathcal{A}}$ enthalten ist, insbesondere gilt $\nabla_{\mathcal{A}} \subseteq \sim_{\mathcal{A}}$. Andererseits ist nach Behauptung 3.44 die von $\sim_{\mathcal{A}}$ erzeugte Äquivalenzrelation eine Kongruenz, woraus

$$\sim_{\mathcal{A}} \subseteq \mathrm{Eq}(\sim_{\mathcal{A}}) \subseteq \nabla_{\mathcal{A}}$$

und damit die Gleichheit folgt. □

Das Lemma läßt sich nicht umkehren:

Beispiel 4.63: Wir betrachten für eine natürliche Zahl $n > 3$ den Unterfunktor $\hat{\mathcal{P}}_{<n}$ des Potenzmengenfunktors, der für eine Menge A definiert ist durch

$$\hat{\mathcal{P}}_{<n}(A) := \{U \subseteq A \mid |U| < n\} \backslash \{\emptyset\}.$$

Man sieht leicht, daß $\hat{\mathcal{P}}_{<n}$ Kerne nicht schwach erhält: Wir betrachten eine $2n$-elementige Menge $A := \{a_1, \ldots, a_{2n},\}$ und die Abbildung $f : A \to 2$, definiert durch

$$f(a_i) := \begin{cases} 0 & i \leq n \\ 1 & i > n \end{cases}$$

Seien dann

$$U := \{a_i \mid 1 \leq i \leq n-2 \text{ oder } i = 2n\}, V := \{a_i \mid n \leq i \leq 2n-2\} \in \hat{\mathcal{P}}_{<n}(A).$$

Dann gilt $\hat{\mathcal{P}}_{<n}(f)U = \{0,1\} = \hat{\mathcal{P}}_{<n}(f)V$, aber es gibt keine Menge $W \in \hat{\mathcal{P}}_{<n}(\operatorname{Ker} f)$ mit $\pi_1[W] = U$ und $\pi_2[W] = V$, denn diese Menge müßte zumindest die $2n-3 > n$ Paare (a_{2n}, a_i) für $n \leq i \leq 2n-2$ und (a_i, a_n) für $1 \leq i \leq n-2$ enthalten, was nicht sein kann.

Da $\hat{\mathcal{P}}_{<n}(1) = 1$ gilt, ist die Menge 1 mit der eindeutigen Coalgebrenstruktur die terminale $\hat{\mathcal{P}}_{<n}$-Coalgebra, die größte Kongruenz auf jeder $\hat{\mathcal{P}}_{<n}$-Coalgebra $\mathcal{A}$ ist also $A \times A$, und man sieht wiederum leicht, daß $A \times A$ auch immer eine Bisimulation ist: Eine Relation $R \subseteq A \times A$ ist genau dann eine Bisimulation, wenn für alle $(a,b) \in R$ eine Teilmenge $U \subseteq R$ mit $0 < |U| < n$ existiert, die $\pi_1[U] = \alpha_A a$ und $\pi_2[U] = \alpha_A b$ erfüllt. Seien also $(a,b) \in A \times A$ gegeben und $a_1, \ldots, a_k$ die Nachfolger von a, $b_1, \ldots, b_l$ die Nachfolger von b. Es gilt $0 < l, k < n$, und wir können $k \geq l$ annehmen. Dann können wir

$$U := \{(a_i, b_i) \mid 1 < i \leq l\} \cup \{(a_i, b_1) \mid l < i \leq k\}$$

wählen.

Wir werden aber jetzt sehen, wie man das schwache Erhalten von Kernen durch größte Bisimulationen ausdrücken kann.

LEMMA 4.64. *Sei $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ eine F-Coalgebra, R eine Kongruenz auf $\mathcal{A}$. Dann ist $(A, (\pi_R : A \to A/R, \alpha_A))$ eine $(A/R) \times F$-Coalgebra, und R ist die größte Kongruenz auf dieser Coalgebra.*

BEWEIS. Daß R eine $A/R \times F$-Kongruenz auf $(A, (\pi_R, \alpha_A))$ ist, folgt mit Satz 3.43 daraus, daß R eine F-Kongruenz nach Voraussetzung und eine A/R-Kongruenz nach Definition von π_R ist. Andererseits ist R offenbar die größte A/R-Kongruenz auf (A, π_R), also auch die größte $A/R \times F$-Kongruenz auf $(A, (\pi_R, \alpha_A))$. □

Daraus folgt:

SATZ 4.65. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *F erhält Kerne schwach.*
(2) *Für jede Menge C erhält $C \times F$ Kerne schwach.*
(3) *Für jede Menge C ist jede $C \times F$-Kongruenz auf einer $C \times F$-Coalgebra eine Bisimulation.*
(4) *Für jede Menge C und jede $C \times F$-Coalgebra $\mathcal{A}$ gilt $\nabla_{\mathcal{A}} = \sim_{\mathcal{A}}$.*

BEWEIS. (1) $\iff$ (2) folgt aus Satz 4.10, (2) $\iff$ (3) ist gerade Hauptsatz 4.61, (3)$\Rightarrow$(4) folgt aus Lemma 4.62. (4)$\Rightarrow$(1) erhält man aus dem eben bewiesenen Lemma und Hauptsatz 4.61: Ist R eine F-Kongruenz auf der F-Coalgebra $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$, so ist R die größte $(A/R) \times F$-Kongruenz auf $(A, (\pi_R, \alpha_A))$, also nach Voraussetzung die größte $(A/R) \times F$-Bisimulation. Damit ist aber R auch eine F-Bisimulation auf $\mathcal{A}$. $\square$

11. Der Funktor $\mathcal{M}^{(-)}$

Wir untersuchen jetzt eine Klasse von Funktoren, die sowohl Anwendungen als auch interessante Limes-Erhaltungs-Eigenschaften hat. Wir werden auch Beispiele für Funktoren sehen, die zwar Kerne schwach erhalten, nicht aber schwache Pullbacks. Die Ergebnisse dieses Abschnitts erscheinen in [**GS01c**].

Sei $\mathcal{M} = (M, +, 0)$ im ganzen Abschnitt ein kommutatives Monoid mit neutralem Element 0. Wir definieren den *$\mathcal{M}$-Mengen-Funktor* $\mathcal{M}^{(-)}$ wie folgt: Für eine Menge A sei $\mathcal{M}^{(A)}$ die Menge der Abbildungen $\varphi : A \to M$ mit endlichem Träger, d.h., der Abbildungen, die nur an endlich vielen Stellen von 0 verschieden sind.

Für eine Abbildung $f : A \to B$ definieren wir $\mathcal{M}^{(f)} : \mathcal{M}^{(A)} \to \mathcal{M}^{(B)}$ für eine Abbildung $\varphi : A \to M$ mit endlichem Träger und ein $b \in B$ durch

$$\mathcal{M}^{(f)}(\varphi)(b) := \sum_{a \in A, fa = b} \varphi a,$$

wobei die (endliche) Summe in $\mathcal{M}$ genommen wird. Man rechnet leicht nach, daß $\mathcal{M}^{(-)}$ ein Funktor ist.

Coalgebren des Funktors $\mathcal{M}^{(-)}$ sind M-wertige bild-endliche Relationen auf einer Menge oder auch Transitionssysteme, bei denen die Kanten mit Werten aus M dekoriert sind. Wir schreiben daher für eine $\mathcal{M}^{(-)}$-Coalgebra (A, α_A) und zwei Elemente $a, a' \in A$ und $m \in M$:

$$a \overset{m}{\to} a' :\iff \alpha_A(a)(a') = m.$$

In [**Rut00a**] wird der Funktor $\mathcal{M}^{(-)}$, wobei $\mathcal{M}$ ein Semiring ist, für die coalgebraische Modellierung von Differentialgleichung verwendet. Für die spezielle Wahl $\mathcal{M} = (M, +, 0) = (2, \max, 0)$ ist $\mathcal{M}^{(-)}$ natürlich isomorph zum endlichen Potenzmengenfunktor.

Wir geben zunächst Bedingungen für Untercoalgebren, Homomorphismen und Kongruenzen an:

LEMMA 4.66. *Seien $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{M}^{(-)}$-Coalgebra, $U \subseteq A$ eine Teilmenge. Dann ist U genau dann eine Untercoalgebra, wenn für alle $u \in U$, alle $a \in A$ und alle $m \in M$ mit $m \neq 0$ gilt:*

$$u \overset{m}{\to} a \Rightarrow a \in U.$$

Eine Abbildung $f : A \to B$ zwischen zwei $\mathcal{M}^{(-)}$-Coalgebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn für alle $a \in A$ und $b \in B$

$$\sum_{fa' = b} \alpha_A(a)(a') = \alpha_B(fa)(b)$$

gilt. Eine Äquivalenzrelation $R \subseteq A \times A$ auf A ist genau dann eine Kongruenz, wenn für alle $(a, b) \in R$ gilt, daß

$$\sum_{aRa'} \alpha_A(a)(a') = \sum_{bRb'} \alpha_A(b)(b')$$

gilt.

Aus dem ersten Teil des Lemmas folgt, daß beliebige Schnitte von Untercoalgebren Untercoalgebren sind. Aus Lemma 4.41 folgt, daß $\mathcal{M}^{(-)}$ beliebige Schnitte erhält. Für Bisimulationen erhalten wir folgende Bedingung:

LEMMA 4.67. *Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei $\mathcal{M}$-Coalgebren, so ist eine Relation $R \subseteq A \times B$ genau dann eine Bisimulation, wenn für jedes Paar $(a,b) \in R$ eine $|A| \times |B|$-Matrix $(m_{x,y})$ mit Einträgen aus M existiert, so daß gilt:*

- *Nur endlich viele $m_{x,y}$ sind von 0 verschieden,*
- *$m_{x,y} \neq 0$ impliziert $(x,y) \in R$,*
- *$\alpha_A(a)$ ist der Vektor der Zeilensummen von $(m_{x,y})$, d.h.*
$$\forall x \in A. \alpha_A(a)(x) = \sum_{y \in B} m_{x,y},$$
- *$\alpha_B(b)$ ist der Vektor der Spaltensummen von $(m_{x,y})$, d.h.*
$$\forall y \in B. \alpha_B(b,y) = \sum_{x \in A} m_{x,y}.$$

Wir haben schon gesehen, daß $\mathcal{M}^{(-)}$ beliebige Schnitte erhält. Um zu untersuchen, wann $\mathcal{M}^{(-)}$ schwache Pullbacks, Kerne und Urbilder erhält, führen wir zwei neue Begriffe ein, wir definieren, wann $\mathcal{M}$ *positiv* und wann $\mathcal{M}$ *verfeinerbar* ist.

DEFINITION 4.68. $\mathcal{M}$ ist *positiv*, wenn für alle $m, n \in M$ aus $m + n = 0$ folgt, daß $m = n = 0$ ist, wenn also 0 das einzige invertierbare Element von $\mathcal{M}$ ist.

Beispiel 4.69: Jeder $\vee$-Halbverband mit 0 ist ein positives kommutatives Monoid, $(\mathbb{N}, +, 0)$, $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, \cdot, 1)$ und $(\mathbb{R}_+, +, 0)$ sind positive kommutative Monoide. Jedes freie kommutative Monoid ist positiv. Jedes Untermonoid eines positiven Monoids ist positiv. Dagegen ist keine Gruppe mit mehr als einem Element positiv.

Ist eine $m \times n$-Matrix $(a_{i,j})$ mit Elementen aus M gegeben und sind $r_i = \Sigma_{1 \leq j \leq m} a_{i,j}$ die Zeilensummen, $c_j = \Sigma_{1 \leq i \leq n} a_{i,j}$ die Spaltensummen dieser Matrix sind, dann gilt wegen der Assoziativität und Kommutativität der Operation $+$ die Gleichung $r_1 + \ldots + r_n = c_1 + \ldots + c_m$. Verfeinerbarkeit ist gerade die umgekehrte Bedingung:

DEFINITION 4.70. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Dann nennen wir $\mathcal{M}$ *(m,n)-verfeinerbar*, wenn für alle $r_1, \ldots, r_n, c_1, \ldots, c_m \in M$, die $r_1 + \ldots + r_n = c_1 + \ldots + c_m$ erfüllen, eine $n \times m$-Matrix $(a_{i,j})$ mit Elementen aus M existiert, deren Zeilensummen $r_1, \ldots, r_n$ und deren Spaltensummen $c_1, \ldots, c_m$ sind.

$$\begin{array}{ccc|c}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} & r_1 \\
\vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} & r_n \\
\hline
c_1 & \cdots & c_m &
\end{array}$$

Für $m = 1$ oder $n = 1$ ist die Bedingung der Definition immer erfüllt. Für $m > 1$ ist $\mathcal{M}$ genau dann $(m,0)$-verfeinerbar, wenn $\mathcal{M}$ positiv ist. Für die anderen Fälle beweisen wir:

SATZ 4.71. *Für alle $m, n > 1$ gilt: $\mathcal{M}$ ist genau dann (m,n)-verfeinerbar, wenn $\mathcal{M}$ $(2,2)$-verfeinerbar ist.*

BEWEIS. Eine $(m, n+1)$-Verfeinerung von $r_1 + \ldots + r_m = c_1 + \ldots + c_n + 0$ ergibt sofort eine (m,n)-Verfeinerung von $r_1 + \ldots + r_m = c_1 + \ldots + c_n$, so daß die eine Richtung klar ist.

Die andere Richtung beweist man durch eine leichte Induktion über die Zahl der Spalten, gefolgt von einer ähnlichen Induktion über die Zahl der Zeilen. Wir zeigen daher nur, wie man von $(2,2)$ auf $(3,2)$ kommt:

Ist $r_1+r_2+r_3 = c_1+c_2$, benutzen wir die $(2,2)$-Verfeinerungs- Eigenschaft, um eine 2×2-Matrix $(a_{i,j})$ mit Spaltensummen c_1, c_2 und Zeilensummen r_1, (r_2+r_3) zu finden. Dann gilt $a_{2,1}+a_{2,2} = r_2+r_3$, also gibt es eine weitere 2×2-Matrix mit Zeilensummen r_2, r_3 und Spaltensummen $a_{2,1}$, $a_{2,1}$:

$$\begin{array}{cc|l} a_{1,1} & a_{1,2} & r_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & r_2+r_3 \\ \hline c_1 & c_2 & \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{cc|l} b_{1,1} & b_{1,2} & r_2 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & r_3 \\ \hline a_{2,1} & a_{2,2} & \end{array}$$

Offensichtlich löst die folgende Matrix das Ausgangsproblem:

$$\begin{array}{cc|l} a_{1,1} & a_{1,2} & r_1 \\ b_{1,1} & b_{1,2} & r_2 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & r_3 \\ \hline c_1 & c_2 & \end{array}$$

□

Daher nennen wir das kommutative Monoid $\mathcal{M}$ *verfeinerbar*, wenn es $(2,2)$-verfeinerbar ist. Wir benötigen noch folgende Beobachtung bzgl. unendlicher Matrizen:

Lemma 4.72. *Sei $\mathcal{M}$ verfeinerbar. Sind X, Y nichtleere Mengen, $\sigma \in \mathcal{M}^{(X)}$ und $\tau \in \mathcal{M}^{(Y)}$ mit $\sum_{x\in X}\sigma(x) = \sum_{y\in Y}\tau(y)$, dann gibt es eine $|X|\times|Y|$-Matrix $(m_{x,y})$ mit Zeilensummen $\sum_{y\in Y} m_{x,y} = \sigma(x)$ und Spaltensummen $\sum_{x\in X} m_{x,y} = \tau(y)$, wobei nur endlich viele $m_{x,y}$ nicht 0 sind.*

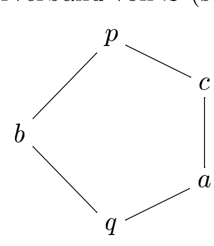
Jetzt zu einigen Beispielen: Aus Satz 4.71 folgt leicht, daß $(\mathbb{N},+,0)$ und $(\mathbb{N}\setminus\{0\},\cdot,1)$ verfeinerbar sind. Verfeinerbarkeit überträgt sich nicht auf Untermonoide: In $(\mathbb{N}\setminus\{0,2\},\cdot,1)$ hat das Verfeinerungs-Problem $5\cdot 6 = 3\cdot 10$ keine Lösung, da jede Verfeinerung den Faktor 2 benötigen würde. Für Verbände erhalten wir:

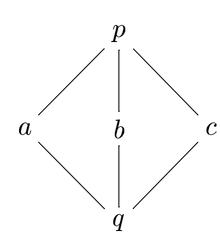
Lemma 4.73. *Ist $\mathcal{L} = (L,\vee,0)$ ein Verband mit kleinstem Element 0, dann ist $\mathcal{L}$ genau dann verfeinerbar, wenn $\mathcal{L}$ distributiv ist.*

Beweis. Ist $\mathcal{L}$ distributiv und sind $a,b,c,d \in L$ mit $a\vee b = c\vee d$ gegeben, dann erhalten wir eine Verfeinerung

$$\begin{array}{cc|l} a\wedge c & a\wedge d & a \\ b\wedge c & b\wedge d & b \\ \hline c & d & \end{array}$$

Ist umgekehrt $\mathcal{L}$ nicht distributiv, dann ist einer der folgenden Verbände N_5 oder M_3 ein Unterverband von $\mathcal{L}$ (s. z.B. [**Grä98**]):

$N_5 =$ 

$M_3 =$ 

In beiden Fällen gilt $a\vee b = b\vee c$. Hätten wir eine Verfeinerung

$$\begin{array}{cc|l} x & y & a \\ z & u & b \\ \hline b & c & \end{array}$$

mit $x,y,u,v \in L$, so würde $u \leq b$ und $u \leq c$ folgen, also $u \leq b\wedge c = q \leq a$, und ebenso $y \leq a$, also $u\vee y = c \leq a$. Aber es gilt in beiden Verbänden $c \not\leq a$ M_3. □

HAUPTSATZ 4.74. *Es gilt:*

(1) $\mathcal{M}^{(-)}$ *erhält Urbilder* $\iff$ $\mathcal{M}$ *ist positiv.*
(2) $\mathcal{M}^{(-)}$ *erhält Kerne schwach* $\iff$ $\mathcal{M}$ *ist verfeinerbar.*
(3) $\mathcal{M}^{(-)}$ *erhält schwache Pullbacks* $\iff$ $\mathcal{M}$ *ist positiv und verfeinerbar.*

BEWEIS. (3) ist wegen Satz 4.35 eine Folgerung aus (1) und (2).

(1): Sei $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{M}^{(-)}$-Coalgebren, $\mathcal{V}$ eine Untercoalgebra von $\mathcal{B}$. Wir müssen nach Hauptsatz 4.47 zeigen, daß $\varphi^{-1}[V]$ eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$ ist. Für gegebene $a \in \varphi^{-1}[V]$, $a' \notin \varphi^{-1}[V]$, $a \xrightarrow{m} a'$ müssen wir nach Lemma 4.66 also $m = 0$ zeigen. Wir wissen, daß $\varphi(a) \in V$ und $\varphi(a') \notin V$ gilt, also folgt aus Lemma 4.66 $\varphi(a) \xrightarrow{0} \varphi(a')$. Dasselbe Lemma zeigt

$$\sum_{\substack{a \xrightarrow{n} x \\ \varphi(x) = \varphi(a')}} n = 0,$$

und da $\mathcal{M}$ positiv ist, sind alle Summanden 0, insbesondere gilt $m = 0$.

Um die Umkehrung zu beweisen, nehmen wir an, daß wir $m_1, m_2 \in M$ mit $m_1 + m_2 = 0$ haben. Die Coalgebra $\mathcal{A}$ bestehe aus einem Punkt p, der zwei Transitionen zu Punkten q_1 und q_2 mit m_1 bzw. m_2 als Label hat. $\mathcal{B}$ bestehe aus zwei Punkten r und s ohne Transitionen (d.h., alle Transitionen sind mit dem Label 0 versehen). Dann erhalten wir einen Homomorphismus φ mit $\varphi(p) = r$ und $\varphi(q_1) = \varphi(q_2) = s$. Da $\{r\}$ eine Untercoalgebra von $\mathcal{B}$ ist, ist $\varphi^{-1}\{r\} = \{p\}$ eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$. Daraus folgt aber $m_1 = m_2 = 0$.

$$\mathcal{A} = \begin{tikzcd} & p \arrow[dl, "m_1"'] \arrow[dr, "m_2"] & & & r \arrow[d, "0"] \\ q_1 & & q_2 \arrow[r, phantom, "\xrightarrow{\varphi}"] & & s \end{tikzcd} = \mathcal{B}$$

Eine leichte Modifikation dieser Konstruktion beweist auch die Rückrichtung von (2): Wenn F Kerne schwach erhält, sind Kerne von Homomorphismen Bisimulationen (Hauptsatz 4.61). Sei $m_1 + m_2 = s_1 + s_2$ ein Verfeinerungsproblem in $\mathcal{M}$. Wir nehmen eine Kopie $\mathcal{A}'$ von obigem $\mathcal{A}$, versehen aber die Kanten von $\mathcal{A}'$ mit den Labeln s_1 bzw. s_2. Wir konstruieren $\mathcal{B}'$ aus $\mathcal{B}$, indem wir die Transition von r nach s mit dem Label $m_1 + m_2 = s_1 + s_2$ versehen. Dann haben wir einen offensichtlichen Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} + \mathcal{A}' = \{0\} \times \mathcal{A} + \{1\} \times \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$, dessen Kern eine Bisimulation ist. Wegen $((0, p), (1, p)) \in \operatorname{Ker} \varphi$ liefert Lemma 4.67 eine Verfeinerung von $m_1 + m_2 = s_1 + s_2$.

Zur Umkehrung von (2): Wir nehmen an, daß $\mathcal{M}$ verfeinerbar ist. Ist $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ein Homomorphismus, so müssen wir nach Hauptsatz 4.61 zeigen, daß $\operatorname{Ker} \varphi$ eine Bisimulation auf $\mathcal{A}$ ist.

Für $(a, b) \in \operatorname{Ker} \varphi$ definieren wir eine $|A| \times |A|$-Matrix mit Einträgen aus M, die die Bedingungen von Lemma 4.67 erfüllt: Die Kongruenzbedingung aus Lemma 4.66 zeigt

$$\sum_{a' \in \varphi^{-}(\{a\})} \alpha_A(a)(a') = \sum_{a' \in \varphi^{-}(\{a\})} \alpha_A(b)(a'),$$

und Lemma 4.72 liefert eine Lösung dieses Verfeinerungsproblems, also eine $|\varphi^{-}(\{a\})| \times |\varphi^{-}(\{a\})|$ Matrix $(m_{x,y})_{x,y \in \varphi^{-}(\{a\})}$ mit Einträgen aus M, Zeilensummen $\alpha_A(a)(a')$, $a' \in \varphi^{-}(\{a\})$ und Spaltensummen $\alpha_A(b)(a')$, $a' \in \varphi^{-}(\{a\})$, für die nur endlich viele der $m_{x,y}$ von 0 verschieden sind. Diese Matrix erfüllt die Eigenschaften von Lemma 4.67. $\square$

Mit Hilfe dieses Satzes erhalten wir ein Beispiel für einen Funktor, der Kerne schwach erhält, nicht aber schwache Pullbacks: Jede abelsche Gruppe $\mathcal{G} = (G, +, 0)$

ist verfeinerbar, denn sind $c_1, c_2, d_1, d_2 \in G$ Elemente mit $c_1 + c_2 = d_1 + d_2$, dann löst die Matrix

$$\begin{array}{cc|c} c_1 - d_2 & d_2 & c_1 \\ c_2 & 0 & c_2 \\ \hline d_1 & d_2 & \end{array}$$

das Verfeinerungsproblem. Wenn G mehr als ein Element erhält, ist $\mathcal{G}$ nicht positiv, und damit erhält der Funktor $\mathcal{G}^{(-)}$ Kerne schwach, nicht aber Urbilder, und somit keine schwachen Pullbacks.

BEMERKUNG 4.75. Ist $(\mathcal{L}, \bigvee, 0)$ ein vollständiger Verband, so kann man entsprechend (vgl. [**GS01c**]) den *(unendlichen) Multimengenfunktor zu* $\mathcal{L}$ definieren: $\mathcal{L}^A := \{\varphi : A \to \mathcal{L}\}$, $\mathcal{L}^f(\psi)(b) := \bigvee\{\psi(a) \mid fa = b\}$. Im Falle $\mathcal{L} = ([0,1], \sup)$ ist $\mathcal{L}^A$ die Menge der Fuzzy-Mengen in A, und die Definition von $\mathcal{L}^f$ ist in der Fuzzy-Logik als *Ausdehnungsprinzip* bekannt (s. z.B. das Lehrbuch [**Zim91**] von Zimmermann und die dort zitierte Literatur).

Für den Funktor $\mathcal{L}^-$ gelten ähnliche Aussagen wie für den $\mathcal{M}$-Mengenfunktor zu einem kommutativen Monoid $\mathcal{M}$, in [**GS01c**] wird z.B. bewiesen, daß $\mathcal{L}^-$ immer Urbilder erhält und genau dann schwache Pullbacks erhält, wenn in $\mathcal{L}$ unendliche Suprema über endliche Infima distribuieren (einen solchen Verband nennt man auch *locale*, [**Bor94c**]).

12. Bemerkungen und Literatur

Die meisten Untersuchungen der Limes-Erhaltungs-Eigenschaften von **Set**-Endofunktoren sind in den sechziger und siebziger Jahren in Prag vorgenommen worden, vor allem von J. Adámek, V. Trnková, V. Koubek, V. Pohlova, J. Reiterman, V. Kurkova und P. Goralčík. In den Artikeln [**Trn71a, Trn71b, Trn69, Kou71, Kou73, KR73**]) werden sehr genaue Aussagen über die Struktur von **Set**-Endofunktoren hergeleitet. Limes-Erhaltungseigenschaften allgemeiner Funktoren finden sich in der Standard-Literatur zur Kategorientheorie (z.B. [**HS73, AHS90, Lan71, Bor94a**]). Bis zur Entdeckung ihrer Anwendbarkeit in der Coalgebra scheint danach das Interesse an **Set**-Funktoren abgenommen zu haben zugunsten der Untersuchung allgemeinerer Funktoren. In [**Rut00b**] hat Jan Rutten eine Theorie der Coalgebra unter der Voraussetzung entwickelt, daß der in Rede stehende Typfunktor schwache Pullbacks erhält. Die Bedingung, daß der Typfunktor Kerne schwach erhält, ist schon in [**TR98, RT94**] untersucht worden, wo gezeigt wird, daß unter dieser Voraussetzung jede Kongruenz eine Bisimulation ist. In [**Mos99, dVR99**] werden stochastische Transitionssysteme mittels Coalgebren eines Unterfunktors des Funktors $(\mathbb{R}_+)^{(-)}$ untersucht, wobei $\mathbb{R}_+$ das additive Monoid der nicht-negativen reellen Zahlen ist: Q ist definiert durch $QA := \{f \in \mathbb{R}_+^{(A)} \mid \sum_{a \in A} fa = 1\}$. In beiden Artikeln wird bewiesen, daß dieser Funktor schwache Pullbacks erhält. In [**Gog67**] untersucht Goguen u.a. $\mathcal{L}$-Fuzzy-Mengen, also Elemente von $\mathcal{L}^A$, für einen vollständigen Verband $\mathcal{L}$.

In [**GS00, GS01d, GS01c**] sind u.a. einige Teile dieses Kapitels erschienen.

KAPITEL 5

Beschränkte Funktoren und terminale Coalgebren

In der Theorie der Kripke-Strukturen spielt die Klasse der bild-endlichen Kripke-Strukturen eine große Rolle, also der Kripke-Strukturen, bei denen jeder Punkt nur eine endliche Anzahl an Nachfolgern besitzt. Man kann zeigen:

- Es gibt eine terminale bild-endliche Kripke-Struktur.
- In zwei Punkten einer bild-endlichen Kripke-Struktur gelten genau dann dieselben Formeln der Modallogik, wenn diese beiden Punkte bisimilar sind.

Ziel dieses Kapitels ist es, beide Aussagen auf F-Coalgebren zu verallgemeinern. Dazu werden wir zunächst definieren, wann eine F-Coalgebra *κ-beschränkt* für eine Kardinalzahl κ ist. Damit können wir dann den Zentralbegriff dieses Kapitels definieren, den des *beschränkten Funktors*. Ein Funktor F ist beschränkt, wenn eine Kardinalzahl κ existiert, so daß jede F-Coalgebra κ-beschränkt ist. Es wird sich herausstellen, daß die Eigenschaft, daß F beschränkt ist, weitreichende Konsequenzen für die Kategorie $\mathbf{Set}_F$ hat: Jede Coalgebra eines beschränkten Funktors läßt sich als Quotient eines Automaten auffassen (Abschnitt 2), es existieren cofreie Coalgebren über beliebigen Farbmengen (Abschnitt 4) und $\mathbf{Set}_F$ ist vollständig (Abschnitt 6). Daß beliebige Produkte von Coalgebren existieren, bedeutet allerdings nicht, daß sich diese Produkte auch einfach berechnen lassen. Wir werden z.B. sehen, daß das Produkt zweier endlicher Coalgebren unendlich sein kann. Trotzdem werden wir beweisen können, daß in $\mathbf{Set}_F$ Produkte über Summen distribuieren, wenn F Urbilder erhält (Abschnitt 8).

Im letzten Drittel des Kapitels gehen wir daran, eine Logik für F-Coalgebren zu definieren und zu untersuchen, inwieweit sich Elemente von F-Coalgebren durch Formeln dieser Logik charakterisieren lassen. Wir werden dabei sehen, daß sich Larry Moss' "Coalgebraische Logik" ([**Mos99**]) als Spezialfall der von James Worrell ([**Wor99a**]) angegebenen Logik auffassen läßt (Abschnitt 14).

Inhaltsangabe

1. Beschränkte Coalgebren und beschränkte Funktoren

Bei Transitionssystemen, also $\mathcal{P}$-Coalgebren, spielt die Klasse der *bild-endlichen* Transitionssysteme eine besondere Rolle, also der Transitionssysteme, bei denen jeder Zustand nur endlich viele Nachfolger hat. Da wir in Abschnitt 3.5 definiert haben, was eine Nachfolgermenge ist, können wir den Begriff des bild-endlichen Transitionssystems verallgemeinern:

DEFINITION 5.1. Sei κ eine Kardinalzahl. Wir nennen die Coalgebra $\mathcal{A}$ *κ-beschränkt* (bzw. *strikt κ-beschränkt*), wenn jeder Zustand $a \in A$ eine Nachfolgermenge U mit $|U| \leq \kappa$ (bzw. $|U| < \kappa$) besitzt, d.h., wenn $\mathfrak{F}(A, \alpha_A a)$ ein Element der Kardinalität $\leq \kappa$ (bzw. $< \kappa$) enthält.

Es würde offenbar reichen, nur den Begriff der strikten κ-Beschränktheit zu definieren, da eine Coalgebra $\mathcal{A}$ genau dann κ-beschränkt ist, wenn sie strikt κ^+-beschränkt ist, wobei κ^+ die Nachfolger- Kardinalzahl von κ ist; wir definieren trotzdem beide Begriffe, da sich der Begriff der κ-Beschränktheit im Zusammenhang mit dem Begriff des *Charakters eines Funktors* als nützlich erweisen wird.

Durch die eben erfolgte Definition haben wir die Möglichkeit, κ-beschränkte F-Coalgebren innerhalb der Klasse aller F-Coalgebren zu definieren. Für Transitionssysteme ist noch eine weitere Möglichkeit bekannt: Man kann bild-endliche Transitionssysteme als Coalgebren des endlichen Potenzmengenfunktor $\mathcal{P}_f$ beschreiben. Auch diese Beschreibung läßt sich auf F-Coalgebren verallgemeinern. Ein Teil der folgenden Definition stammt aus [**Trn69**].

DEFINITION 5.2. Für jede Kardinalzahl κ definieren wir zwei Unterfunktoren von F, die *strikte κ-Beschränkung* $F_{<\kappa}$ und die *κ-Beschränkung* $F_{\leq\kappa}$, indem wir für jede Menge A

$$F_{<\kappa}(A) := \bigcup_{U \subseteq A, |U| < \kappa} F(\subseteq^A_U)[FU] \quad \text{und} \quad F_{\leq\kappa}(A) := F_{<\kappa^+}(A)$$

setzen. Auf Abbildungen sind $F_{<\kappa}$ und $F_{\leq\kappa}$ definiert als Einschränkungen von F.

Der Funktor F heißt *strikt κ-beschränkt*, wenn $F_{<\kappa} = F$ gilt, *κ-beschränkt*, wenn $F_{\leq\kappa} = F$ gilt. Wir nennen κ dann *(strikte) Beschränktheitskonstante*. Ist F κ-beschränkt für eine Kardinalzahl κ, so nennen wir F *beschränkt*.

F heißt *κ-residuell*, wenn es für jedes Element a jeder F-Coalgebra $\mathcal{A}$ eine Untercoalgebra $\mathcal{U} \leq \mathcal{A}$ mit $a \in U$ und $|U| \leq \kappa$ gibt.

Man überprüft leicht, daß der endliche Potenzmengenfunktor $\mathcal{P}_f$ gleich $\mathcal{P}_{<\omega}$ ist. Offensichtlich ist für jede Kardinalzahl κ eine F-Coalgebra $\mathcal{A}$ genau dann strikt κ-beschränkt, wenn sie eine $F_{<\kappa}$-Coalgebra ist, d.h., wenn $\alpha_A[A] \subseteq F_{<\kappa}(A)$ gilt. Der Funktor $F_{\leq\kappa}$ erlaubt eine andere Beschreibung, die sich im folgenden als nützlich herausstellen wird:

SATZ 5.3. *Es gilt für jede Kardinalzahl κ und jede Menge $A \neq \emptyset$*

$$F_{\leq\kappa}A = \bigcup_{f:\kappa \to A} (Ff)[F(\kappa)].$$

In [**Rut00b**] wird ein *beschränkter Funktor* definiert als ein Funktor F, der (mit den eben definierten Begriffen) κ-residuell für eine Kardinalzahl κ ist (in einer früheren Version dieses Artikels wurde sogar benötigt, daß Einserzeugte existieren). Der Zusammenhang zu unserer Begrifflichkeit ist:

SATZ 5.4. *Sei κ eine Kardinalzahl. Dann ist jeder κ-beschränkte Funktor $\kappa \cdot \omega$-residuell; umgekehrt ist jeder κ-residuelle Funktor κ-beschränkt.*

Beweis. Ist $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ eine Coalgebra des κ-beschränkten Funktors F und $a \in A$, so erhält man eine Untercoalgebra U_a von $\mathcal{A}$ mit $a \in U_a$ und $|U_a| \leq \kappa \cdot \omega$ durch folgende Konstruktion: Man setzt $U_0 := \{a\}$; ist U_k für ein $k \in \mathbb{N}$ schon definiert und für jedes $u \in U_k$ die Menge $V_k^u \subseteq A$ eine Nachfolgermenge von u der Kardinalität $\leq \kappa$, so setzt man $U_{k+1} := \bigcup_{u \in U_k} V_u^k$. Dann ist $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$ eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$, die a enthält und eine Kardinalität von höchstens $\omega \cdot \kappa$ hat.

Umgekehrt ist eine Untercoalgebra nach Satz 3.31 Nachfolgermenge jedes ihrer Elemente. □

Solange man also nur darüber redet, ob ein Funktor beschränkt oder unbeschränkt (d.h.: nicht beschränkt) ist, ist es egal, ob man die hier gegebene Definition oder die von Rutten gegebene verwendet - sie unterscheiden sich nur darin, durch welche Kardinalzahl ein beschränkter Funktor beschränkt ist. Die hier gegebene Definition hat den Vorteil, daß man feiner zwischen Funktoren unterscheiden kann: So ist der Identitätsfunktor $\mathcal{I}$ nach der hier gegebenen Definition 1-beschränkt, der Funktor $\mathcal{I}^2$ hingegen 2-beschränkt, was gut zum Ausdruck bringt, daß jedes Element jeder $\mathcal{I}$-Coalgebra einen Nachfolger hat, jedes Element jeder $\mathcal{I}^2$-Coalgebra zwei Nachfolger. Im Sinne von Rutten wären $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}^2$ hingegen beide ω-beschränkt.

Im nächsten Abschnitt werden wir den Begriff des κ-beschränkten Funktors noch etwas verallgemeinern. Insbesondere sind wir daran interessiert, die kleinste Beschränktheitskonstante eines Funktors herauszufinden. Zunächst beweisen wir aber noch, daß sich das Erhalten von (schwachen) Pullbacks von F auf $F_{<\kappa}$ für unendliche κ fortsetzt, was insofern interessant ist, als diese Aussage für endliche κ nicht gilt, wie man am Funktor $(-)_2^3 = ((-)^3)_{<3}$ sieht.

Satz 5.5. *Seien κ eine unendliche Kardinalzahl, F ein Funktor. Wenn F (schwache) Pullbacks erhält, so auch $F_{<\kappa}$. Wenn F Kerne (schwach) erhält, so auch $F_{<\kappa}$.*

Beweis. F erhalte schwache Pullbacks. Sei

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

ein Pullback in $\mathbf{Set}$, $P = \{(a,b) \mid fa = gb\}$. Seien $u \in F_{<\kappa}(A)$, $v \in F_{<\kappa}(B)$ gegeben mit $(F_{<\kappa}f)(u) = (F_{<\kappa}g)(v)$. Da $F_{<\kappa}$ strikt κ-beschränkt ist, gibt es Mengen $U \subseteq A$ und $V \subseteq B$ mit $|U|, |V| < \kappa$ und $u \in F(\subseteq_U^A)[FU]$, $v \in F(\subseteq_V^B)[FV]$. Seien $u' \in FU$, $v' \in FV$ gegeben mit $u = F(\subseteq_U^A)u'$, $v = F(\subseteq_V^A)v'$. Dann betrachten wir folgenden Pullback $Q = P \cap (U \times V)$ von $f \circ \subseteq_U^A : U \to C$ mit $g \circ \subseteq_V^B : V \to C$:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, "\pi_1' \circ \subseteq_Q^P"] \arrow[dr, hook, "\subseteq_Q^P"] \arrow[dd, "\pi_2' \circ \subseteq_Q^P"'] & & U \arrow[d, "\subseteq_U^A"] \\ & P \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, hook, "\subseteq_V^B"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Es gilt $F(f \circ \subseteq_U^A)u' = F(g \circ \subseteq_V^B)v'$, nach Voraussetzung an F existiert also ein $q \in FQ$ mit $F(\pi_1')q = u'$, $F(\pi_2')q = v'$. Da $|Q| \leq |U| \times |V| < \kappa$ gilt, weil κ unendlich ist, ist aber $F_{<\kappa}(Q) = F(Q)$, also $q \in F_{<\kappa}(Q)$. Wir setzen $z := F_{<\kappa}(\subseteq_Q^P)q \in F_{<\kappa}(P)$

und berechnen.

$$F_{<\kappa}(\pi_1)z = F_{<\kappa}(\pi_1 \circ \subseteq_Q^P)q = F_{<\kappa}(\subseteq_U^A \circ \pi_1')q = F_{<\kappa}(\subseteq_U^A)u' = u,$$
$$F_{<\kappa}(\pi_2)z = F_{<\kappa}(\pi_2 \circ \subseteq_Q^P)q = F_{<\kappa}(\subseteq_V^B \circ \pi_2')q = F_{<\kappa}(\subseteq_V^B)v' = v.$$

Also erhält $F_{<\kappa}$ den Pullback von f mit g schwach. Wenn F sogar Pullbacks erhält, ist das gefundene z offenbar eindeutig. Der Beweis für Kerne verläuft analog. □

2. Beschränkte Funktoren als Quotienten

Seien M, C nichtleere Mengen. Dann ist $C \times (-)^M$ durch $|M|$ beschränkt, denn es gilt für jede nichtleere Menge $Y \neq \emptyset$

$$\bigcup_{f:M \to Y} (\mathrm{id}_C \times f^M)[C \times M^M] = \{(c, f \circ g) \mid c \in C, f \in Y^M, g \in M^M\} = C \times Y^M,$$

was nach Satz 5.3 ausreicht. Es gilt sogar schon

$$C \times Y^M = \bigcup_{f:M \to Y} (\mathrm{id}_C \times f^M)[C \times \{\mathrm{id}_M\}],$$

d.h., wir müssen gar nicht das gesamte Bild von $C \times M^M$ unter $C \times f^M$ betrachten, um $C \times Y^M$ ausschöpfen zu können, sondern wir kommen mit den Bildern der Teilmenge $C \times \{\mathrm{id}_M\}$ von $C \times M^M$ aus. Diese Beobachtung wird festgehalten in folgender Definition:

Definition 5.6 (reaching couple, [**Trn69**]). Ein Paar (A, X) mit $A \subseteq F(X)$ heißt *reaching couple von* F, wenn für jede Menge $Y \neq \emptyset$ gilt:

$$FY = \bigcup_{f:X \to Y} (Ff)[A].$$

Dieser Begriff verallgemeinert den Begriff der κ-Beschränktheit, denn offenbar ist F genau dann κ-beschränkt, wenn $(F(\kappa), \kappa)$ ein reaching couple von F ist.

Die Klasse der reaching couples ist sicherlich nach oben abgeschlossen: Seien $X \subseteq X'$, $A \subseteq F(X)$ und $A' \subseteq F(X')$ Mengen mit $F(\subseteq_X^{X'})[A] \subseteq A'$. Ist (A, X) ein reaching couple, so ist auch (A', X') ein reaching couple. Wir wollen jetzt ein "kleinstes" reaching couple eines beschränkten Funktors finden: Wenn F überhaupt beschränkt ist, kann man eine Menge A mit kleinster Kardinalität $\chi_{F,1}$ finden, für die eine Menge X existiert, so daß (A, X) ein reaching couple von F ist. Unter den Mengen X, für die (A, X) ein reaching couple von F ist, können wir jetzt wiederum eine mit kleinster Kardinalität $\chi_{F,2}$ auswählen. Dieser Begriff wird fixiert in folgender Definition:

Definition 5.7 ([**Trn69**],Charakter von F). Sei F beschränkt. Die eben definierten Kardinalzahlen $\chi_{F,1}$ und $\chi_{F,2}$ heißen *erster Charakter* bzw. *zweiter Charakter* von F. Wir nennen $\chi_F := (\chi_{F,1}, \chi_{F,2})$ den *Charakter von* F.

Man kann zeigen ([**Trn69**]), daß für jedes reaching-couple (A', X') von F sogar $|X'| \geq \chi_{F,2}$ gilt. Weiterhin: Ist (A, X) ein reaching couple von F, B eine Menge mit $|B| = |A|$ und Y eine Menge mit $|Y| = |X|$, so gibt es eine Injektion $i : B \hookrightarrow FY$, für die $(i[B], Y)$ ein reaching couple von F ist. Daher werden wir oft auch sagen, daß $(\chi_{F,1}, \chi_{F,2})$ ein reaching couple von F ist. Wir setzen jetzt das Einstiegsbeispiel fort:

Beispiel 5.8: Seien M, C nichtleere Mengen. Dann ist $\chi_{C \times (-)^M} = (|C|, |M|)$: Daß $\chi_{C \times (-)^M} \leq (|C|, |M|)$ gilt, haben wir schon oben gesehen.

Ist $(A \subseteq C \times X^M, X)$ ein reaching couple von $C \times (-)^M$, so gilt insbesondere

$$C \times M^M = \bigcup_{f:X \to M} (\mathrm{id}_C \times f^M)[A].$$

Folglich gibt es für jedes $c \in C$ ein $(c, g_c : M \to X) \in A$ mit $\mathrm{id}_M = f_c \circ g_c$ für ein $f_c : X \to M$, was zeigt, daß f_c surjektiv ist, d.h., daß $|X| \geq |M|$ gilt. Für zwei verschiedene $c, c' \in C$ gilt $(c, g_c) \neq (c', g_{c'})$, was auch $|A| \geq |C|$ zeigt.

Der folgende Satz ist entscheidend für die weitere Entwicklung:

SATZ 5.9 ([**Trn69**]). *Sei (C, M) ein reaching couple von F. Dann ist F Quotient des Funktors $C \times (-)^M$. Ist $\nu : F \overset{\bullet}{\twoheadrightarrow} G$ eine surjektive natürliche Transformation, dann ist G beschränkt, und es gilt $\chi_G \leq (|C|, |M|)$.*

BEWEIS. Zum ersten Teil: Wir definieren eine natürliche Transformation $\nu : C \times (-)^M \overset{\bullet}{\to} F$ durch $\nu_A(c, f) := (Ff)(c)$. Seien $A \neq \emptyset$, $u \in FA$ gegeben. Nach Definition eines reaching couple finden wir ein $c \in C$ und ein $f : M \to A$ mit $(Ff)c = u$. Aber dann gilt $\nu_A(c, f) = u$, d.h., ν_A ist surjektiv.

Zum zweiten Teil: Es ist leicht zu sehen, daß $(\nu_M[C], M)$ ein reaching couple von G ist. $\square$

Damit können wir jetzt zusammenfassend beweisen:

HAUPTSATZ 5.10 ([**GS01a**]). *Für einen Funktor F sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

1. *F ist κ-residuell für eine Kardinalzahl κ.*
2. *Es gibt eine Kardinalzahl κ, so daß jede F-Coalgebra $\mathcal{A}$ mit $A \neq \emptyset$ eine Untercoalgebra $\mathcal{U}$ mit $0 < |U| \leq \kappa$ besitzt.*
3. *F ist beschränkt.*
4. *Es gibt Mengen C und M, für die eine surjektive natürliche Transformation $C \times (-)^M \overset{\bullet}{\twoheadrightarrow} F$ existiert.*

BEWEIS. (1)$\Rightarrow$(2) ist offensichtlich

(2)$\Rightarrow$(3): Sei κ wie in der Voraussetzung. Wir behaupten, daß $(F(\kappa), \kappa)$ ein reaching couple von F ist. Seien $A \neq \emptyset$ und $t \in F(A)$ gegeben. Dann definieren wir eine konstante Coalgebrenstruktur $\alpha_A : A \to F(A)$ durch $\alpha_A a := t$ für alle $a \in A$. Nach Voraussetzung finden wir eine nichtleere Untercoalgebra $\mathcal{U} = (U, \alpha_U)$ von (A, α_A) mit $|U| \leq \kappa$. Also können wir eine Surjektion $f : \kappa \twoheadrightarrow U$ wählen. Dann ist auch $Ff : F(\kappa) \twoheadrightarrow F(U)$ surjektiv. Sei ein $u \in U$ gewählt. Dann finden wir ein $s \in F(\kappa)$ mit $F(f)(s) = \alpha_U(u)$. Wir setzen $f' := \subseteq_U^A \circ f : M \to A$ und berechnen

$$F(f')(s) = F(\subseteq_U^A)(F(f)(s)) = F(\subseteq_U^A)(\alpha_U(u)) =$$
$$= (\alpha_A \circ \subseteq_U^A)(u) = \alpha_A(u) = t,$$

was zeigt, daß $(F(\kappa), \kappa)$ ein reaching couple von F ist.

(3) $\iff$ (4) folgt aus Satz 5.9, (3) $\iff$ (1) aus Satz 5.4. $\square$

KOROLLAR 5.11 ([**GS01a**]). *Ist F beschränkt, so ist für jede Menge D der Funktor $D \times F$ beschränkt.*

BEWEIS. Aus einer surjektiven natürlichen Transformation $\nu : C \times (-)^M \overset{\bullet}{\twoheadrightarrow} F$ erhält man sofort eine surjektive natürliche Transformation

$$\mathrm{id}_D \times \nu : D \times C \times (-)^M \overset{\bullet}{\twoheadrightarrow} D \times A,$$

definiert durch $(\mathrm{id}_D \times \nu)_A := \mathrm{id}_D \times \nu_A$. $\square$

Im nächsten Abschnitt werden wir weitere Charakterisierungen von beschränkten Funktoren kennenlernen.

3. Generatorenmengen

Eine mengen-indizierte Familie $(\mathcal{G}_i)_{i\in I} \subseteq \mathbf{Set}_F$ von Coalgebren ist eine *Menge von Generatoren* ([**Bor94a**]), wenn für je zwei F-Homomorphismen $\varphi, \psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ gilt:

$$(\forall i \in I. \forall \theta : \mathcal{G}_i \to \mathcal{A}. \varphi \circ \theta = \psi \circ \theta) \Rightarrow \varphi = \psi.$$

Da der Vergißfunktor $U : \mathbf{Set}_F \to \mathbf{Set}$ alle Colimites erhält, ist die Existenz von cofreien Coalgebren nach dem Special Adjoint Functor Theorem ([**Bor94a**]) sichergestellt, wenn $\mathbf{Set}_F$ eine Menge von Generatoren besitzt. Es zeigt sich, daß diese Bedingung äquivalent zur Beschränktheit von F ist:

Satz 5.12 ([**GS01a**]). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *F ist beschränkt.*
2. *$\mathbf{Set}_F$ hat eine Menge von Generatoren.*
3. *Es gibt eine mengen-indizierte Familie $(\mathcal{G}_i)_{i\in I} \subseteq \mathbf{Set}_F$, so daß für jede Coalgebra $\mathcal{A}$ und jedes $a \in A$ ein $i \in I$ existiert, für das $\mathcal{G}_i$ isomorph zu einer Untercoalgebra $\mathcal{U}_a$ von $\mathcal{A}$ mit $a \in U_a$ ist.*
4. *Es existiert eine Menge $(\mathcal{G}_i)_{i\in I} \subseteq \mathbf{Set}_F$ von F-Coalgebren mit folgender Eigenschaft: Für jede F-Coalgebra $\mathcal{A}$ gilt*

$$\mathcal{A} = \bigcup \{\varphi[\mathcal{G}_i] \mid i \in I, \varphi : \mathcal{G}_i \hookrightarrow \mathcal{A}\},$$

d.h., jede F-Coalgebra $\mathcal{A}$ ist Vereinigung der Untercoalgebren von $\mathcal{A}$, die in der Familie $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ liegen.

Beweis. (1)⇒(2): Sei F beschränkt und eine Kardinalzahl κ gewählt, so daß F κ-residuell ist. Dann bildet die Menge aller Coalgebren mit Kardinalität $\leq \kappa$ eine Menge von Generatoren.

(2)⇒(3): Sei $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ eine Menge von Generatoren. Dann erfüllt die Menge aller homomorphen Bilder von Coalgebren aus $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ Bedingung (3): Sei $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ gegeben. Nach [**Bor94a**] ist jede F-Coalgebra homomorphes Bild einer Summe von Coalgebren aus $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$, also gibt es zu jedem $a \in \mathcal{A}$ ein $i \in I$ und einen F-Homomorphismus $\varphi_a : \mathcal{G}_i \to \mathcal{A}$ mit $a \in \varphi_a[G_i]$. Dann ist aber $\mathcal{G}_i / \operatorname{Ker} \varphi_a$ nach Satz 3.40 ein Faktor von $\mathcal{G}_i$, der isomorph zu $\varphi_a[\mathcal{G}_i]$ ist, einer Untercoalgebra von $\mathcal{A}$, die a enthält. Das zeigt die Behauptung.

(3)⇒(4)⇒(1) ist offensichtlich. □

Man kann auch eine kategorientheoretische Eigenschaft von F verwenden, um Beschränktheit auszudrücken. Dies ist nützlich, um den Begriff des beschränkten Funktors auf andere Kategorien zu verallgemeinern (s. z.B. Worrells Arbeit [**Wor99b**]): Wie Adámek und Porst gezeigt haben ([**AP01**]), ist für eine unendliche reguläre Kardinalzahl κ ein Funktor F genau dann strikt κ-beschränkt, wenn er *κ-accessible* ist, d.h., wenn er alle κ-gefilterten Colimites erhält.

Weiterhin ist leicht zu sehen, daß die Kategorie $\mathbf{Set}_F$ genau dann *lokal präsentierbar* ist (für eine Definition vergleiche man die Lehrbücher [**AR94**] von Adámek und Rosicky oder [**Bor94b**] von Borceux), wenn F beschränkt ist. Genauer gilt für reguläre Kardinalzahlen $\kappa > \omega$ sogar: F ist genau dann strikt κ-beschränkt, wenn $\mathbf{Set}_F$ lokal κ-präsentierbar ist. Dies könnte es ermöglichen, die recht gut bekannte Theorie der lokal präsentierbaren Kategorien für die Coalgebra fruchtbar zu machen. So ist z.B. bekannt ([**AR94**], Kapitel 1.C), daß die lokal präsentierbaren Kategorien genau den vollen reflektiven Unterkategorien von Kategorien $\mathbf{Set}^{\mathcal{A}} := \{F : \mathcal{A} \to \mathbf{Set} \mid F \text{ Funktor }\}$ für eine kleine Kategorie $\mathcal{A}$ entsprechen, die unter κ-gerichteten Colimites (für ein geeignetes κ) abgeschlossen sind. Die einzige mir bekannte Arbeit, in der eine solche Beziehung - zwar nicht systematisch, aber als Beweishilfsmittel - ausgenutzt wird, ist [**Wor00**].

Eine weitere überraschende Charakterisierung der strikt ω-beschränkten Funktoren findet sich in [**AT90**]: Ein Funktor ist genau dann strikt ω-beschränkt, wenn er Pushouts von epis erhält (oder - äquivalenterweise - schwach erhält).

4. Die Existenz terminaler und cofreier Coalgebren

Wir wollen jetzt einen elementaren Beweis dafür geben, daß jeder beschränkte Funktor ein Covarietor (s. Definition 3.52) ist. In [**Gum99**] findet sich ein Beweis, der auf der in Satz 5.12 gegebenen Charakterisierung beruht. Wir führen hier einen noch konkreteren Beweis, indem wir verwenden, daß nach Satz 5.9 jeder beschränkte Funktor Quotient eines Funktors der Gestalt $C \times (-)^M$ für geeignete Mengen C, M ist. Die Darstellung folgt im wesentlichen [**GS01a**].

Lemma 5.13 ([**GS01a**]). *Sei $\nu : G \overset{\bullet}{\twoheadrightarrow} F$ eine surjektive natürliche Transformation. Ist $\mathcal{C}$ eine schwach terminale G-Coalgebra, so ist $\nu(\mathcal{C})$ eine schwach terminale F-Coalgebra.*

Beweis. Sei $(A, \alpha_A) \in \mathbf{Set}_F$ eine F-Coalgebra. Da ν_A surjektiv ist, finden wir eine G-Coalgebra-Struktur $\alpha_A{}' : A \to GA$ auf A, so daß $\nu_A \circ \alpha_A{}' = \alpha_A$ gilt. Nach Voraussetzung gibt es einen G-Homomorphismus $\varphi : (A, \alpha_A{}') \to \mathcal{C}$; dieser ist dann auch ein F-Homomorphismus $(A, \alpha_A) \to \nu(\mathcal{C})$, was zeigt, daß $\nu(\mathcal{C})$ schwach terminal ist.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "\alpha'_A"] \arrow[dd, bend right, "\alpha_A"'] & C \arrow[d, "\alpha_C"] \\
GA \arrow[r, "G\varphi"'] \arrow[d, "\nu_A"] & GC \arrow[d, "\nu_C"] \\
FA \arrow[r, "F\varphi"'] & FC
\end{tikzcd}$$

□

Satz 5.14 ([**GS01a**]). *Wenn F beschränkt ist, so ist F ein Covarietor. Ist (C, M) ein reaching couple von F, so hat die terminale F-Coalgebra höchstens $|C^{M^*}|$ Elemente.*

Beweis. Da mit F nach Korollar 5.11 auch $D \times F$ für jede Menge D beschränkt ist, müssen wir nur zeigen, daß eine terminale F-Coalgebra existiert. Sei (C, M) ein reaching couple von F. Nach Satz 5.9 ist F Quotient des Funktors $C \times (-)^M$, und nach Beispiel 3.54 gibt es zu diesem Funktor eine terminale Coalgebra mit Trägermenge C^{M^*}. Nach Lemma 5.13 hat $\mathbf{Set}_F$ somit eine schwach terminale Coalgebra, also nach Behauptung 3.53 eine terminale Coalgebra, die wir als Quotient von C^{M^*} nach der größten F-Kongruenz erhalten. □

Beispiel 5.15: Ist F κ-beschränkt, also $(F(\kappa), \kappa)$ ein reaching couple von F, so hat die terminale F-Coalgebra höchstens $|F(\kappa)|^{\kappa^*}$ Elemente. Insbesondere hat für eine unendliche Kardinalzahl κ die terminale $\mathcal{P}_{\leq\kappa}$-Coalgebra höchstens

$$|\mathcal{P}(\kappa)|^{\kappa^*} = |\mathcal{P}(\kappa)| = 2^\kappa$$

Elemente.

J. Adámek und H. Porst haben gezeigt ([**AP01**]), daß es einen unbeschränkten Covarietor gibt.

Eine weitere Konstruktionsmöglichkeit der terminalen Coalgebra eines beschränkten Funktors beruht auf folgender Beobachtung, die im Kern auf [**Acz88**] zurückgeht:

SATZ 5.16. *Sei F κ-residuell. Dann sind für eine F-Coalgebra $\mathcal{Q}$ folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$\mathcal{Q}$ ist eine terminale Coalgebra.*
(2) *Für jede F-Coalgebra $\mathcal{U}$ mit $|U| < \kappa$ gibt es genau einen F-Homomorphismus $!_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{Q}$.*

Insbesondere gilt für einen κ-residuellen Funktor F: Ist $\mathcal{K}$ die Menge *aller F-Coalgebren $\mathcal{A}$ mit $|A| \leq \kappa$, so ist $(\sum \mathcal{K})/\nabla$ eine terminale F-Coalgebra.*

BEWEIS. (1)$\Rightarrow$(2) ist offensichtlich. Sei also (2) vorausgesetzt und eine F-Coalgebra $\mathcal{A}$ gegeben. Dann gibt es für jedes $a \in A$ eine Untercoalgebra $\mathcal{U}_a \leq \mathcal{A}$ mit $a \in \mathcal{U}_a$ und $|U_a| < \kappa$ sowie einen eindeutigen F-Homomorphismus

$$!_{U_a} : \mathcal{U}_a \to \mathcal{Q}.$$

Wir definieren eine Abbildung $!_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{Q}$ durch $(!_{\mathcal{A}})_{|\mathcal{U}_a} :=!_{U_a}$. Dies ist wohldefiniert wegen der Eindeutigkeitsvoraussetzung und der Tatsache, daß endliche Schnitte von Untercoalgebren wieder Untercoalgebren sind. $!_{\mathcal{A}}$ ist offensichtlich ein Homomorphismus und eindeutig. □

In [**Lam68**] findet sich - in unserer Sprache ausgedrückt - folgende Charakterisierung:

SATZ 5.17 ([**Lam68**]). *In $\mathbf{Set}_F$ gibt es genau dann eine terminale Coalgebra, wenn es eine Kardinalzahl κ gibt, so daß jede F-Coalgebra ein homomorphes Bild der Kardinalität $\leq \kappa$ besitzt.*

BEWEIS. Existiert eine terminale F-Coalgebra $\mathfrak{T}(1)$, so kann man $\kappa := |\mathfrak{T}(1)|$ wählen. Ist umgekehrt ein κ wie in der Voraussetzung gegeben, so ist die Summe der F-Coalgebren der Kardinalität $\leq \kappa$ schwach terminal, also existiert nach Behauptung 3.53 eine terminale F-Coalgebra. □

5. Covarietäten

In der Universellen Algebra spielen *Varietäten*, also Klassen von Algebren, die gegen Unteralgebren, homomorphe Bilder und Summen abgeschlossen sind, eine große Rolle. Wir definieren den dualen Begriff:

DEFINITION 5.18 ([**GS01b**],[**Gum99**]). Sei $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{Set}_F$ eine Klasse von Coalgebren. Dann definieren wir folgende Klassen:

- $\mathcal{H}(\mathcal{K})$ ist die Klasse aller Coalgebren, die homomorphes Bild einer Coalgebra aus $\mathcal{K}$ sind.
- $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ ist die Klasse aller Coalgebren, die Untercoalgebra einer Coalgebren aus $\mathcal{K}$ sind.
- $\Sigma(\mathcal{K})$ ist die Klasse aller Coalgebren, die Summe von Coalgebren aus $\mathcal{K}$ sind.

$\mathcal{K}$ heißt *Covarietät*, wenn $\mathcal{K}$ gegen $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}$ und Σ abgeschlossen ist, *Quasi-Covarietät*, wenn $\mathcal{K}$ gegen $\mathcal{H}$ und Σ abgeschlossen ist.

Ein *Hüllenoperator* $\mathcal{O}$ ordnet jeder Klasse $\mathcal{K}$ eine Klasse $\mathcal{O}(\mathcal{K})$ zu und hat folgende Eigenschaften: Für alle Klassen $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ gilt $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{K})$ ($\mathcal{O}$ ist *extensiv*), aus $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$ folgt $\mathcal{O}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{K}')$ ($\mathcal{O}$ ist *monoton*), und es gilt $\mathcal{O}(\mathcal{K}) = \mathcal{O}(\mathcal{O}(\mathcal{K}))$ ($\mathcal{O}$ ist *idempotent*).

SATZ 5.19. *$\mathcal{H}$, $\mathcal{S}$ und Σ sind Hüllenoperatoren. Für jede Klasse $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{Set}_F$ von Coalgebren gilt*

(1) $\mathcal{HS}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{SH}(\mathcal{K})$,
(2) $\Sigma\mathcal{S}(\mathcal{K}) = \mathcal{S}\Sigma(\mathcal{K})$,
(3) $\Sigma\mathcal{H}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{H}\Sigma(\mathcal{K})$.
(4) *Wenn F Urbilder erhält, gilt $\mathcal{HS}(\mathcal{K}) = \mathcal{SH}(\mathcal{K})$.*

(5) *Wenn die Gleichung $\mathcal{HS}(\mathcal{K}) = \mathcal{SH}(\mathcal{K})$ für jede Klasse $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{Set}_F$ gilt und $|F1| > 1$ ist, dann erhält F Urbilder.*

Folglich ist für jede Klasse $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{Set}_F$ die Klasse $\mathcal{SH}\Sigma(\mathcal{K})$ die kleinste Covarietät, die $\mathcal{K}$ umfaßt, $\mathcal{H}\Sigma(\mathcal{K})$ die kleinste Quasi-Covarietät, die $\mathcal{K}$ umfaßt.

Beweis. Alle Aussagen außer (5) sind in [**GS01b, Gum99**] bewiesen worden. Wir beweisen daher nur (5). Der Beweis ist in Zusammenarbeit mit Alexander Schulz entstanden ([**Sch**])

Es gelte also $|F1| > 1$, und F erhalte Urbilder nicht. Nach Korollar 4.9 gibt es dann auch ein klassifizierendes Urbild, das F nicht erhält. Wir erhalten damit ein Pullback-Diagramm folgender Gestalt, das F nicht erhält:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook, "\subseteq_U^A"] \arrow[d, "!_U"'] & A \arrow[d, "\chi_U"] \\
1 \arrow[r, "\mathrm{inr}"'] & 1+1=2
\end{tikzcd}$$

wobei inr die Inklusionsabbildung in den zweiten Summanden von $1+1$ ist, $!_U$ die eindeutige Abbildung und $\chi_U = !_U + !_{\complement U}$. Dann können wir $\emptyset \neq U \neq A$ annehmen, wie man leicht sieht, und finden folgende Elemente:

- Ein $x \in FA \backslash F(\subseteq_U^A)[FU]$, das $F(\chi_U)x = F(\mathrm{inr})z$ für ein $z \in F1$ erfüllt. Dieses Element existiert, da F den obigen Pullback nicht schwach erhält.
- Ein $y \in FU$, für das $F(!_U)y \neq z$ gilt. Dieses Element erhält man, da $F(!_U)$ surjektiv ist und $|F1| > 1$ vorausgesetzt war.

Wir definieren auf A die Coalgebrenstruktur

$$\alpha_A : a \mapsto \begin{cases} x & \text{wenn } a \in U \\ F(\subseteq_U^A)y & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiterhin sei auf $2 = \{0,1\}$ die Coalgebrenstruktur

$$0 \mapsto (F\,\mathrm{inr})(F!_U)y,\ 1 \mapsto (F\chi_U)x = F(\mathrm{inr})z$$

erklärt. Dann ist χ_U bzgl. dieser Coalgebrenstrukturen ein surjektiver Homomorphismus und 1 ist mit der Einbettung inr eine Untercoalgebra, wobei die Coalgebrenstruktur α_1 das einzige Element von 1 auf z abbildet. Folglich gilt $(1, \alpha_1) \in \mathcal{SH}(\mathcal{A})$.

Wir zeigen jetzt, daß $(1, \alpha_1) \notin \mathcal{HS}(\mathcal{A})$ gilt, womit alles bewiesen ist. Wäre $(1, \alpha_1) \in \mathcal{HS}(\mathcal{A})$, so gäbe es eine nichtleere Untercoalgebra $\mathcal{V}$ von $\mathcal{A}$, für die die eindeutige Abbildung $!_V : V \to 1$ ein Homomorphismus ist. Da keine nichtleere Teilmenge von U eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$ ist, gibt es in diesem Fall ein $v \in V \cap (\complement U)$. Für dieses v gilt

$$F(\subseteq_V^A)(\alpha_V v) = \alpha_A v = F(\subseteq_U^A)y.$$

Es gilt

$$!_A \circ \subseteq_V^A = !_V \quad \text{und} \quad !_A \circ \subseteq_U^A = !_U,$$

folglich einerseits

$$F(!_A)(\alpha_A v) = F(!_A)(F(\subseteq_V^A)(\alpha_V v)) = F(!_V)(\alpha_V v) = \alpha_1(!_V v) = z,$$

andererseits

$$F(!_A)(\alpha_A v) = F(!_A)(F(\subseteq_U^A)(y)) = F(!_U)(y) \neq z,$$

was den gesuchten Widerspruch ergibt. $\square$

Dieser Satz zeigt wiederum, daß Coalgebra nicht einfach dual zu Universeller Algebra ist - die Operatoren $\mathcal{H}, \mathcal{S}, \mathcal{P}$ in der Universellen Algebra kommutieren alle nicht, während in der Coalgebra $\mathcal{S}$ und Σ kommutieren (s. z.B. [**Ihr93**]). Da die Vereinigung einer Familie von Untercoalgebren ein homomorphes Bild ihrer Summe ist, folgt:

BEHAUPTUNG 5.20. *Jede Quasi-Covarietät $\mathcal{K}$ ist gegen Vereinigungen von Untercoalgebren abgeschlossen, d.h., ist $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ eine Coalgebra und ist $(\mathcal{U}_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{K}$ eine Familie von Untercoalgebren von $\mathcal{A}$, die alle in $\mathcal{K}$ liegen, so ist auch $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{K}$.*

SATZ 5.21. *Ist G ein Unterfunktor von F, so ist $\mathbf{Set}_G$ eine F-Covarietät. Insbesondere bilden die (strikt) κ-beschränkten F-Coalgebren eine Covarietät in $\mathbf{Set}_F$.*

BEWEIS. Die Sätze 3.60 und 3.12 zeigen die Abgeschlossenheit von $\mathbf{Set}_G$ in $\mathbf{Set}_F$ gegen homomorphe Bilder und Untercoalgebren. Die Abgeschlossenheit gegen Summen ist offensichtlich. □

In der Universellen Algebra lassen sich Varietäten auch durch Quotienten von freien Algebren definieren. Wir untersuchen das duale Konzept:

DEFINITION 5.22 ([**GS01b**]). Sei $\mathcal{U}$ eine Untercoalgebra der Coalgebra $\mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathcal{U})$ als die Klasse aller Coalgebren $\mathcal{B} \in \mathbf{Set}_F$ definiert, für die jeder F-Homomorphismus $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ durch $\mathcal{U}$ faktorisiert, d.h., es gilt $\varphi[B] \subseteq U$ für alle diese φ.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "\forall\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\exists\bar{\varphi}"'] & \mathcal{A} \\ & \mathcal{U} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Eine F-Coalgebra $\mathcal{A}$ hat die *Fortsetzungseigenschaft* (oder: ist *injektiv*, [**Bor94a**]), wenn für jede Coalgebra $\mathcal{B}$ und jede Untercoalgebra $\mathcal{V} \leq \mathcal{B}$ gilt: Jeder Homomorphismus $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{A}$ läßt sich zu einem Homomorphismus $\bar{\varphi} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ fortsetzen.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, dashed, "\bar{\varphi}"] & \mathcal{A} \\ \mathcal{V} \arrow[u, hook, "\leq"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

In [**GS01b**] wird bewiesen, daß unter der Voraussetzung, daß F ein Covarietor ist, eine Coalgebra $\mathcal{A}$ genau dann die Fortsetzungseigenschaft besitzt, wenn sie Retrakt einer cofreien Coalgebra ist.

SATZ 5.23 ([**GS01b**]). *Seien $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ eine F-Coalgebra, $\mathcal{U} \leq \mathcal{A}$ eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathcal{U})$ gegen die Operatoren $\mathcal{H}$ und Σ abgeschlossen, also eine Quasi-Covarietät. Besitzt $\mathcal{A}$ die Fortsetzungseigenschaft, so ist $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathcal{U})$ eine Covarietät.*

Umgekehrt gilt: Sei F κ-residuell für eine Kardinalzahl κ. Dann gibt es für jede Covarietät $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{Set}_F$ eine Untercoalgebra $\mathcal{U}$ von $\mathfrak{T}(\kappa)$, der cofreien F-Coalgebra über der Menge κ, mit $\mathcal{K} = \mathcal{Q}(\mathfrak{T}(\kappa),\mathcal{U})$.

Man kann noch eine genauere Korrespondenz beweisen:

DEFINITION 5.24 ([**GS01b**]). Sei $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$. Eine Untercoalgebra $\mathcal{U} \leq \mathcal{A}$ heißt *invariant*, wenn sie unter allen Endomomorphismen von $\mathcal{A}$ abgeschlossen ist, d.h., wenn $\varphi[U] \subseteq U$ für jeden Endomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ gilt.

SATZ 5.25 ([**GS01b**]). *$\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ habe die Fortsetzungseigenschaft, und es sei $\mathcal{U} \leq \mathcal{A}$ eine invariante Untercoalgebra von $\mathcal{A}$. Dann gilt $\mathcal{U} \in \mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathcal{U})$. Gilt für eine weitere Untercoalgebra $\mathcal{U}'$ von $\mathcal{A}$, daß $\mathcal{U}' \subsetneq \mathcal{U}$ ist, so gilt $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathcal{U}') \subsetneq \mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathcal{U})$.*

Damit folgt insgesamt: Wenn $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ die Fortsetzungseigenschaft hat, dann korrespondieren die Covarietäten der Gestalt $\mathcal{Q}(\mathcal{A},\mathcal{U})$ genau zu den invarianten Untercoalgebren von $\mathcal{A}$.

Viele in der Praxis vorkommende F-Covarietäten $\mathcal{K}$ haben folgende Eigenschaft: Ist $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ und ist $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ eine F-Coalgebra, für die es eine totale Bisimulation $R \subseteq A \times B$ gibt (s. Definition 3.22), so gilt auch $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$. Für eine Klasse $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{Set}_F$ sei $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ die Klasse aller F-Coalgebren $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$, für die ein $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ und eine totale Bisimulation R zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ existieren. Ist $\mathcal{B}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$, so sagt man, daß $\mathcal{K}$ *gegen totale Bisimulationen abgeschlossen* ist.

Weiterhin führen wir die Klasse $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K})$ der *homomorphen Urbilder von* $\mathcal{K}$ ein: $\mathcal{H}^{-}(\mathcal{K})$ besteht aus genau den $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$, für die ein $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ und ein surjektiver Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ existieren.

Beispiel 5.26: Die Klasse aller Kripke-Strukturen, in denen eine gegebene modallogische Formel gilt, ist gegen totale Bisimulationen abgeschlossen.

Offenbar sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{H}^{-}$ Hüllenoperatoren. Aus Satz 3.21.(4) folgt, daß $\mathcal{B}(\mathcal{K}) = \mathcal{H}^{-}\mathcal{H}(\mathcal{K})$ für jede Klasse $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{Set}_F$ gilt. Ist F beschränkt, so bestimmt nach Satz 5.23 jede Untercoalgebra einer cofreien F-Coalgebra eine Covarietät. Aus Behauptung 4.32 folgt leicht:

SATZ 5.27 ([**GS01b**]). *F erhalte schwache Pullbacks und sei beschränkt. Für eine F-Covarietät $\mathcal{K}$ gilt genau dann $\mathcal{K} = \mathcal{Q}(\mathfrak{T}(1),\mathcal{U})$ für eine Untercoalgebra $\mathcal{U} \leq \mathfrak{T}(1)$, wenn $\mathcal{K}$ gegen totale Bisimulationen abgeschlossen ist.*

6. Die Vollständigkeit von $\mathbf{Set}_F$

Nach Satz 3.1 werden Colimites in $\mathbf{Set}_F$ wie in $\mathbf{Set}$ konstruiert, und Entsprechendes gilt für jeden Limes, den F erhält. In Hauptsatz 4.26 haben wir gesehen, daß $\mathbf{Set}_F$ vollständig ist und der Limes eines Diagramms $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$ durch die größte $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation gegeben ist, wenn F alle mono-sourcen erhält. Aus dem Adjoint Functor Theorem ([**Bor94a**]) folgt, daß $\mathbf{Set}_F$ für jeden Covarietor F vollständig ist. Wir werden in diesem Abschnitt einen elementaren Beweis dieser Tatsache führen. Daß $\mathbf{Set}_F$ vollständig ist, bedeutet allerdings nicht, daß sich Limites in $\mathbf{Set}_F$ "einfach" konstruieren lassen, wofür wir in diesem und im nächsten Abschnitt Beispiele sehen werden.

Nach Behauptung 4.53 hat $\mathbf{Set}_F$ Equalizer für jeden Funktor F. Der Schlüssel zum Beweis, daß für jeden Covarietor F Produkte in $\mathbf{Set}_F$ existieren, ist folgendes Ergebnis:

HAUPTSATZ 5.28 ([**GS01d**]). *Wenn für eine Familie $(\mathcal{B}_i)_{i\in I}$ von Coalgebren in $\mathbf{Set}_F$ das Produkt $\mathcal{B} := \prod_{i\in I} \mathcal{B}_i$ mit den Projektionen $\eta_i : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_i$, $i \in I$, in $\mathbf{Set}_F$ existiert und für jedes $i \in I$ die Coalgebra $\mathcal{A}_i$ eine Untercoalgebra von $\mathcal{B}_i$ ist, so existiert auch das Produkt $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ in $\mathbf{Set}_F$ und ist isomorph zu einer Untercoalgebra von $\mathcal{B}$.*

BEWEIS. Sei $D := [\bigcap_{i\in I} \eta_i^{-}(A_i)]$. Dann ist D eine Untercoalgebra von $\mathcal{B}$, und für jedes $i \in I$ faktorisiert der Homomorphismus $\eta_i \circ \leq_D^B \colon \mathcal{D} \to \mathcal{B}_i$ durch $\mathcal{A}_i$, d.h., es gibt einen Homomorphismus $\nu_i : \mathcal{D} \to \mathcal{A}_i$ mit $\eta_i \circ \leq_D^B = \leq_{A_i}^{B_i} \circ \nu_i$. Wir behaupten, daß $(\mathcal{D}, (\nu_i)_{i\in I})$ das Produkt der Familie $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ in $\mathbf{Set}_F$ ist. Sei $\mathcal{Q}$ mit den Homormorphismen $\mu_i : \mathcal{Q} \to \mathcal{A}_i$ ein Konkurrent für $\mathcal{D}$. Dann ist $\mathcal{Q}$ mit den Homomorphismen $\leq_{A_i}^{B_i} \circ \mu_i : \mathcal{Q} \to \mathcal{B}_i$ ein Konkurrent für das Produkt der $\mathcal{B}_i$.

Folglich gibt es genau einen Homomorphismus $\psi : \mathcal{Q} \to \mathcal{B}$, der $\eta_i \circ \psi = \leq_{A_i}^{B_i} \circ \mu_i$ für alle $i \in I$ erfüllt.

$\psi[Q]$ ist eine Untercoalgebra von $\mathcal{B}$, und es gilt $\eta_i[\psi[Q]] \subseteq A_i$, folglich faktorisiert ψ durch $\mathcal{D}$ mittels $\psi = \leq_D^B \circ \tilde{\psi}$. Es folgt

$$\leq_{A_i}^{B_i} \circ \nu_i \circ \tilde{\psi} = \eta_i \circ \leq_D^B \circ \tilde{\psi} = \eta_i \circ \psi = \leq_{A_i}^{B_i} \circ \mu_i.$$

Da $\leq_{A_i}^{B_i}$ mono ist, folgt $\nu_i \circ \tilde{\psi} = \mu_i$.

$\tilde{\psi}$ ist eindeutig, denn für ein $\hat{\psi}$ mit $\nu_i \circ \hat{\psi} = \mu_i$ folgt

$$\eta_i \circ \leq_D^B \circ \tilde{\psi} = \eta_i \circ \leq_D^B \circ \hat{\psi}$$

für alle $i \in I$, es gilt somit $\leq_D^B \circ \tilde{\psi} = \leq_D^B \circ \hat{\psi}$ und daher $\tilde{\psi} = \hat{\psi}$.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "\tilde{\psi}"] \arrow[drr, bend left, "\psi"] \arrow[ddr, bend right, "\mu_i"'] & & \\
& D \arrow[r, "\leq_D^B"'] \arrow[d, "\nu_i"] & \Pi_{i \in I} B_i \arrow[d, "\eta_i"] \\
& A_i \arrow[r, "\leq_{A_i}^{B_i}"'] & B_i
\end{tikzcd}$$

□

Bis jetzt haben wir lediglich Limites bzgl. $\mathbf{Set}_F$ betrachtet. Aus diesen Limites kann man jetzt Limites von Diagrammen $\bar{\mathfrak{D}}$ in Quasi-Covarietäten $\mathcal{K}$ konstruieren, und zwar ist der Limes von $\bar{\mathfrak{D}}$ bzgl. $\mathcal{K}$ die größte Untercoalgebra des Limes von $\bar{\mathfrak{D}}$ bzgl. $\mathbf{Set}_F$, die in $\mathcal{K}$ enthalten ist (nach Behauptung 5.20 sind Quasi-Covarietäten gegen Vereinigungen von Untercoalgebren abgeschlossen). Insbesondere gilt:

Satz 5.29 ([**GS01d**]). *Wenn $\mathbf{Set}_F$ vollständig ist, so ist auch jede F-Quasi-Covarietät vollständig.*

Lemma 5.30 ([**GS01d**]). *Wenn $\mathfrak{T}(Y)$ existiert, dann existiert $\mathfrak{T}(X)$ für jedes $X \subseteq Y$, in der Tat gilt $\mathfrak{T}(X) \leq \mathfrak{T}(Y)$.*

Beweis. Sei

$$Q := \bigcup \{ (\widetilde{\subseteq_X^Y \circ g})[A] \mid g : A \to X, \mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F \}.$$

Die Einbettung $\leq: \mathcal{Q} \to \mathfrak{T}(Y)$, komponiert mit $\varepsilon_Y : \mathfrak{T}(Y) \to Y$, faktorisiert durch X, was die gesuchte Abbildung $\varepsilon_X : Q \to X$ ergibt. Es ist leicht zu sehen, daß (Q, ε_X) cofrei über X ist.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[r, "\subseteq_X^Y"] & Y \\
A \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, dashed, "\bar{g}"'] & Q \arrow[u, dashed, "\varepsilon_X"'] \arrow[r, "\leq"] & \mathfrak{T}(Y) \arrow[u, "\varepsilon_Y"']
\end{tikzcd}$$

□

Satz 5.31 ([**GS01d**]). *Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen und Y eine Menge, deren Kardinalität größer ist als die von $\prod_{i \in I} X_i$. Wenn $\mathfrak{T}(Y)$ existiert, dann gilt $\prod_{i \in I} \mathfrak{T}(X_i) = \mathfrak{T}(\prod_{i \in I} X_i)$ in $\mathbf{Set}_F$.*

Damit erhalten wir:

Hauptsatz 5.32 ([**GS01d**]). *Für jeden Covarietor F, also insbesondere für beschränkte Funktoren F, ist $\mathbf{Set}_F$ vollständig.*

BEWEIS. Wir müssen nur die Existenz von Produkten nachweisen, denn nach Behauptung 4.53 hat $\mathbf{Set}_F$ Equalizer. Sei $(\mathcal{A}_i)_{i\in I} \subseteq \mathbf{Set}_F$ eine Familie in $\mathbf{Set}_F$. Jedes $\mathcal{A}_i$ ist isomorph zu einer Untercoalgebra der cofreien Coalgebra $\mathfrak{T}(A_i)$. Nach Hauptsatz 5.28 existiert dann $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ und ist eine Untercoalgebra von $\mathfrak{T}(\prod_{i\in I} A_i)$. □

Dieses Kriterium ist fast eine äquivalente Charakterisierung, denn wenn Produkte existieren und zumindest eine cofreie Coalgebra $\mathfrak{T}(X)$ mit $|X| > 1$ existiert, dann folgt aus Lemma 5.30 und Satz 5.31, daß alle cofreien Coalgebren existieren. Also folgt:

KOROLLAR 5.33 ([**GS01d**]). *Wenn für eine Menge X mit $|X| > 1$ die cofreie Coalgebra $\mathfrak{T}(X)$ existiert, dann ist $\mathbf{Set}_F$ genau dann vollständig, wenn F ein Covarietor ist.*

Beispiel 5.34 ([**GS01d**]): Seien die $\mathcal{P}_f$-Coalgebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$\mathcal{A} = \bullet \longrightarrow \bullet$$

und

$$\mathcal{B} = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[loop above] \end{tikzcd}.$$

Dann ist die größte Bisimulation zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ leer, d.h., das Produkt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ muß nach Lemma 4.24 die leere Coalgebra sein.

Beispiel 5.35 ([**GS01d**]): Für jede Coalgebra $\mathcal{A}$ jedes Funktors ist $(\mathcal{A}, \mathrm{id}_A, \pi_{\nabla_\mathcal{A}})$ das Produkt von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}/\nabla_\mathcal{A}$, somit gilt $\mathcal{A} \times \mathcal{A}/\nabla_\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$. Insbesondere erhält man für die $\mathcal{P}$-Coalgebra $\mathcal{A} = \bullet \longrightarrow \bullet$, daß $\nabla_\mathcal{A} = \Delta_A$ ist, somit $\mathcal{A} \cong \mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

Produkte von Coalgebren lassen sich i.a. nicht in die Produkte ihrer Grundmengen einbetten, wofür wir im nächsten Abschnitt ein Beispiel sehen werden. Insbesondere werden wir eine endliche $\mathcal{P}_f$-Coalgebra $\mathcal{A}$ kennenlernen, für die $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ unendlich ist.

7. Produkte von $\mathcal{P}$-Coalgebren?

Der Potenzmengenfunktor $\mathcal{P}$ ist nicht beschränkt, und wir wissen schon aus Beispiel 3.57, daß es keine terminale $\mathcal{P}$-Coalgebra geben kann, daß also $\mathbf{Set}_\mathcal{P}$ nicht vollständig ist. Andererseits existieren einige nicht-leere Produkte von $\mathcal{P}$-Coalgebren (s. Beispiel 5.35), und man könnte folgendes erhoffen: Man betrachtet eine nicht-leere (mengen-indizierte) Familie $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{P}$-Coalgebren. Dann ist diese Familie durch eine Kardinalzahl κ strikt beschränkt, d.h., man kann die $\mathcal{A}_i$ als Elemente von $\mathbf{Set}_{\mathcal{P}_{<\kappa}}$ auffassen. $\mathbf{Set}_{\mathcal{P}_{<\kappa}}$ ist aber vollständig, d.h., dort existiert das Produkt der Familie $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$. Ist dieses Produkt vielleicht auch das Produkt in $\mathbf{Set}_\mathcal{P}$? Das folgende Beispiel aus [**GS01d**] zeigt, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist. Wir betrachten folgendes Transitionssystem über zwei Elementen:

$$\mathcal{C}_2 = \begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left] \arrow[r, bend left] & 1 \arrow[l, bend left] \arrow[loop right] \end{tikzcd}.$$

Die zu $\mathcal{C}_2$ gehörende $\mathcal{P}$-Coalgebra ist $\mathcal{C}_2 = (\{0,1\}, \alpha_C)$ mit $\alpha_C(0) = \alpha_C(1) = \{0,1\}$. $\mathcal{C}_2$ hat die Eigenschaft, daß $c \leftrightarrow c'$ für jedes Paar $c, c' \in C_2$ gilt; folglich gilt (s. Beispiel 3.4):

LEMMA 5.36. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{P}$-Coalgebra. Eine Abbildung $\varphi : A \to C_2$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn es für jedes $a \in A$ Elemente $a_0, a_1 \in A$ gibt mit $a \to a_0$, $a \to a_1$ und $\varphi(a_i) = i$.*

Sei κ eine Ordinalzahl, $A = \{a, b\}$ eine zweielementige Menge. Wir definieren auf $\kappa + A$ eine $\mathcal{P}$-Coalgebrenstruktur α_A, indem wir für $x, y \in \kappa + A$ setzen:

$$x \to y :\Longleftrightarrow\ y \in A \vee (x, y \in \kappa \wedge y < x).$$

Dann sind die beiden Abbildungen

$$\varphi_a, \varphi_b : (\kappa + A, \alpha_A) \to \mathcal{C}_2$$
$$\varphi_a(x) := \begin{cases} 0 & x = a \\ 1 & x \neq a \end{cases}, \quad \varphi_b(x) := \begin{cases} 1 & x = b \\ 0 & x \neq b \end{cases}$$

nach dem Lemma $\mathcal{P}$-Homomorphismen. Wenn wir annehmen, daß das Produkt

$$(\mathcal{Q}, \psi_1 : \mathcal{Q} \to \mathcal{C}_2, \psi_2 : \mathcal{Q} \to \mathcal{C}_2) := \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$$

in $\mathbf{Set}_{\mathcal{P}}$ existiert, dann erhalten wir einen vermittelnden $\mathcal{P}$-Homomorphismus

$$(\varphi_a, \varphi_b) : (\kappa + A, \alpha_A) \to \mathcal{Q}$$

Wir zeigen, daß (φ_a, φ_b) auf κ injektiv ist. Sei also ein $x \in \kappa$ gegeben und y das kleinste Element von κ mit

$$(\varphi_a, \varphi_b)(x) = (\varphi_a, \varphi_b)(y) =: q \in Q.$$

Widerspruchsannahme: $x > y$. Dann gilt $x \to y$, also auch $(\varphi_a, \varphi_b)(x) \to (\varphi_a, \varphi_b)(y)$, also $q \to q$. Wegen $(\varphi_a, \varphi_b)(y) \to q$ gibt es dann ein $y' \in \kappa + A$ mit $y \to y'$ und $(\varphi_a, \varphi_b)(y') = q$. Da $y \not\to y$ gilt, muß $y' \in A$ gelten. Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß $y' = a$ ist. Dann folgt aber

$$1 = \varphi_a(y) = \psi_1 \circ (\varphi_a, \varphi_b)(y) = \psi_1 \circ (\varphi_a, \varphi_b)(y') = \psi_1 \circ (\varphi_a, \varphi_b)(a) = \varphi_a(a) = 0,$$

was widersprüchlich ist. Damit sehen wir auch:

Korollar 5.37 ([**GS01d**]). *Ist κ eine unendliche Kardinalzahl, dann ist die Anzahl der Zustände des Produktes von $\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$ in $\mathbf{Set}_{\mathcal{P}_{<\kappa}}$ mindestens κ.*

8. Distributivität

Für alle Mengen A, B, C gilt

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C,$$

d.h., Produkte distribuieren in **Set** über Summen. Allgemein definieren wir:

Definition 5.38. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *distributiv*, wenn sie binäre Summen hat und für alle Objekte $A, B, C \in \mathcal{C}$ gilt: Wenn $A \times B$ und $A \times C$ existieren, so existiert auch $A \times (B + C)$ und der kanonische Morphismus

$$A \times B + A \times C \to A \times (B + C)$$

ist ein Isomorphismus.

Offenbar kann man analog definieren, was es bedeutet, daß in einer Kategorie $\mathcal{C}$ Produkte über unendliche Summen distribuieren oder unendliche Produkte über unendliche Summen distribuieren, und in der Tat werden wir in den Fällen, in denen wir beweisen werden, daß $\mathbf{Set}_F$ distributiv ist, immer ein unendliches Distributivgesetz mitbeweisen.

Der Begriff der distributiven Kategorie ist in der Literatur nicht ganz einheitlich definiert (s. die Übersichtsartikel von Carboni et al. [**CLW93**] und Cockett [**Coc93**]), wobei sich die verschiedenen Definitionen vor allem darin unterscheiden, "wie viele" Limites die in Rede stehende Kategorie haben muß.

Wir werden jetzt beweisen, daß die Kategorie $\mathbf{Set}_F$ distributiv ist, wenn F Urbilder erhält, und daß auch die Umkehrung gilt, wenn $\mathbf{Set}_F$ endliche Produkte hat.

Satz 5.39 ([**GHS01**]). *Wenn F Urbilder erhält, ist $\mathbf{Set}_F$ distributiv.*

Beweis. F erhalte Urbilder. Seien $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ und $\mathcal{B}_i \in \mathbf{Set}_F$ für $i \in I$ gegeben, so daß $\mathcal{A} \times \mathcal{B}_i$ für jedes $i \in I$ existiert. Seien $p_i : \mathcal{A} \times \mathcal{B}_i \to \mathcal{A}$ und $q_i : \mathcal{A} \times \mathcal{B}_i \to \mathcal{B}_i$ die Projektionen der Produkte.

Wir behaupten, daß $\sum_{i\in I} \mathcal{A} \times \mathcal{B}_i$ zusammen mit den Projektionen

$$[p_i]_{i\in I} : \sum_{i\in I} \mathcal{A} \times \mathcal{B}_i \to \mathcal{A}$$

$$\sum_{i\in I} q_i : \sum_{i\in I} A \times \mathcal{B}_i \to \sum_{i\in I} \mathcal{B}_i$$

das Produkt von $\mathcal{A}$ mit $\sum_{i\in I} \mathcal{B}_i$ in $\mathbf{Set}_F$ ist.

Sei $(\mathcal{Q}, \varphi : \mathcal{Q} \to \mathcal{A}, \psi : \mathcal{Q} \to \sum_{i\in I} \mathcal{B}_i)$ ein Konkurrent. Nach Satz 4.49 erhalten wir eine Zerlegung $\mathcal{Q} = \sum_{i\in I} \mathcal{Q}_i$ in $\mathbf{Set}_F$ mit $Q_i = \psi^{-}[B_i]$. Also haben wir für jedes $i \in I$ ein Paar $\varphi_{|Q_i} : \mathcal{Q}_i \to \mathcal{A}$, $\psi_{|Q_i} : \mathcal{Q}_i \to \mathcal{B}_i$ von Homomorphismen, die einen eindeutigen vermittelnden Morphismus $(\varphi_{|Q_i}, \psi_{|Q_i}) : \mathcal{Q}_B \to \mathcal{A} \times \mathcal{B}_i$ induzieren. Damit ist

$$\sum_{i\in I} (\varphi_{|Q_i}, \psi_{|Q_i}) : \mathcal{Q} \to \sum_{i\in I} \mathcal{A} \times \mathcal{B}_i$$

ein vermittelnder Morphismus für $(\mathcal{Q}, \varphi, \psi)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}\times\mathcal{B}_i \arrow[rr, "p_i"] \arrow[ddr, "q_i"'] & & \mathcal{A} & \\
& \mathcal{Q}_i \arrow[ul, dashed] \arrow[r, hook, "\subseteq^{\mathcal{Q}}_{\mathcal{Q}_i}"] \arrow[d, "\psi_{|Q_i}"] & \mathcal{Q} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\psi"] & \sum \mathcal{A}\times\mathcal{B}_i \arrow[ul, "{[p_i]_{i\in I}}"'] \arrow[dl, "\sum q_i"] \\
& \mathcal{B}_i \arrow[r, hook, "e_i"'] & \sum \mathcal{B}_i &
\end{tikzcd}$$

Sei $\rho : \mathcal{Q} \to \sum_{i\in I} \mathcal{A} \times \mathcal{B}_i$ ein weiterer vermittelnder Morphismus. Für jedes $i \in I$ gilt

$$(\sum_{i\in I} q_i) \circ \rho_{|Q_i} = e_i \circ \psi_{|Q_i},$$

wobei e_i die Einbettung von $\mathcal{B}_i$ in die Summe $\sum_{i\in I} \mathcal{B}_i$ ist. Also faktorisiert $\rho_{|Q_i}$ durch $\mathcal{A} \times \mathcal{B}_i$, in der Tat ist $\rho_{|Q_i}$ ein vermittelnder Morphismus für $\varphi_{|Q_i}$ und $\psi_{|Q_i}$.

Das zeigt wegen der Eindeutigkeit dieses vermittelnden Morphismus $\rho_{|Q_i} = (\varphi_{|Q_i}, \psi_{|Q_i})$ und somit $\rho = \sum_{i\in I} (\varphi_{|Q_i}, \psi_{|Q_i})$. □

Mit etwas mehr Schreibaufwand sieht man genauso, daß in $\mathbf{Set}_F$ auch unendliche Produkte über unendliche Summen distribuieren, wenn F Urbilder erhält.

Um eine Umkehrung unter der Voraussetzung, daß $\mathbf{Set}_F$ endlich vollständig ist, beweisen zu können, zeigen wir zunächst, daß F genau dann Urbilder erhält, wenn in $\mathbf{Set}_F$ Pullbacks mit binären Summen kommutieren.

Definition 5.40. In einer Kategorie $\mathcal{C}$, die binäre Summen hat, *kommutieren Pullbacks mit binären Summen*, wenn für alle Morphismen $f : A \to C$, $g_1 : B_1 \to C$ und $g_2 : B_2 \to C$ gilt: Wenn die Pullbacks $\mathrm{pb}(f, g_1)$ und $\mathrm{pb}(f, g_2)$ existieren, existiert auch der Pullback $\mathrm{pb}(f, [g_1, g_2])$, und in diesem Fall gilt

$$\mathrm{pb}(f, [g_1, g_2]) = \mathrm{pb}(f, g_1) + \mathrm{pb}(f, g_2).$$

Analog kann man wiederum definieren, was es bedeutet, daß in einer Kategorie Pullbacks mit beliebigen Summen kommutieren.

Satz 5.41 ([**GHS01**]). *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

1. *F erhält Urbilder.*

2. *In* $\mathbf{Set}_F$ *kommutieren Pullbacks mit beliebigen Summen.*
3. *In* $\mathbf{Set}_F$ *kommutieren Pullbacks mit binären Summen.*

BEWEIS. (1)⇒(2) wird sehr ähnlich wie Satz 5.39 bewiesen, (2)⇒(3) ist offensichtlich.

(3)⇒(1): Wir überprüfen Bedingung (3) von Satz 4.49: Sei $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$ ein Homomorphismus. Dann betrachten wir für $i = 1, 2$ den Pullback

$$\begin{tikzcd}
[\varphi^-[B_i]] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi|"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathcal{B}_i \arrow[r, hook] & \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2
\end{tikzcd}$$

in $\mathbf{Set}_F$. Nach Voraussetzung ist folgendes Diagramm ein Pullback:

$$\begin{tikzcd}
[\varphi^-[B_1]] + [\varphi^-[B_2]] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi|"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 \arrow[r, hook, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2}"'] & \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2
\end{tikzcd}$$

Aber der Pullback von $\mathrm{id}_{\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2}$ entlang φ ist gerade $\mathcal{A}$ selbst, so daß wir $[\varphi^-[B_1]] + [\varphi^-[B_2]] = \mathcal{A}$ schließen können, was nach Satz 4.49 ausreicht. □

Es ist leicht zu sehen, daß in $\mathbf{Set}_F$ Equalizer mit Summen kommutieren, d.h., für eine Familie von Homomorphismen $(\varphi_i, \psi_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{B})_{i\in I}$ ist der Equalizer von $\sum_{i\in I} \varphi_i : \sum_{i\in I} \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}$ mit $\sum_{i\in I} \psi_i : \sum_{i\in I} \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}$ durch die Summe der Equalizer φ_i mit den ψ_i gegeben. Es gilt nämlich (man vgl. Abschnitt 4.9 für die Beschreibung von Equalizern in $\mathbf{Set}_F$)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{eq}(\sum_{i\in I} \varphi_i, \sum_{i\in} \psi_i) \\
=&[\{a \in \sum_{i\in I} A_i \mid (\sum_{i\in I} \varphi_i)a(\sum_{i\in} \psi_i)\}] \\
=&[\sum_{i\in I} \{a \in A_i \mid \varphi_i a = \psi_i a\}] \\
=&\sum_{i\in I} [\{a \in A_i \mid \varphi_i a = \psi_i a\}] \\
=&\sum_{i\in I} \mathrm{eq}(\varphi_i, \psi_i).
\end{aligned}$$

Da der Pullback zweier Homomorphismen $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ gerade der Equalizer der Homomorphismen $\varphi \circ \pi_1$ und $\psi \circ \pi_2 : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ist, wobei π_1, π_2 die Projektionen von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ sind (das gilt in jeder Kategorie, man vgl. z.B. [**HS73**]), erhalten wir:

SATZ 5.42 ([**GHS01**]). *Wenn* $\mathbf{Set}_F$ *endliche Produkte hat und distributiv ist, dann erhält* F *Urbilder.*

9. Verallgemeinerte cofreie Coalgebren und Produkte

Wir haben in Satz 3.58 gesehen, daß jede natürliche Transformation $\nu : F \overset{\bullet}{\to} G$ einen Funktor $\nu \circ (-) : \mathbf{Set}_F \overset{\bullet}{\to} \mathbf{Set}_G$ induziert, der alle Colimites erhält. Ist G ein beschränkter Funktor, so haben wir nach Satz 5.9 für geeignete Mengen C, M eine surjektive natürliche Transformation $\nu : C \times (-)^M \overset{\bullet}{\twoheadrightarrow} G$. Produkte zwischen zwei $C \times (-)^M$-Coalgebren sind nach Hauptsatz 4.26 durch die größte Bisimulation zwischen diesen Coalgebren gegeben. Wir werden sehen, daß man das Produkt von zwei G-Coalgebren konstruieren kann, indem man zunächst das Produkt von zwei geeigneten $C \times (-)^M$-Coalgebren bildet, dieses Produkt dann mittels $\nu \circ (-)$ als G-Coalgebra auffasst und nach einer geeigneten Kongruenz faktorisiert. Dies kann man auch als Verallgemeinerung der Konstruktion der terminalen G-Coalgebra aus der terminalen $C \times (-)^M$-Coalgebra auffassen, die wir in Lemma 5.13 durchgeführt haben. Zunächst beweisen wir:

Satz 5.43. *Seien $\nu : F \overset{\bullet}{\to} G$ eine natürliche Transformation, F ein Covarietor. Dann gibt es für jede G-Coalgebra $\mathcal{A} = (A, \alpha_A) \in \mathbf{Set}_G$ eine F-Coalgebra $\mathcal{S}_A = (S_\mathcal{A}, \alpha_S)$, die F-*cofrei *über $\mathcal{A}$ ist, d.h.: Es gibt einen G-Homomorphismus $\varepsilon : (S_\mathcal{A}, \nu_{S_\mathcal{A}} \circ \alpha_S) \to \mathcal{A}$, so daß für jede F-Coalgebra $\mathcal{B} = (B, \alpha_B)$ und jeden G-Homomorphismus $\varphi : (B, \nu_B \circ \alpha_B) \to (A, \alpha_A)$ genau ein F-Homomorphismus $\tilde{\varphi} : \mathcal{B} \to \mathcal{S}_A$ mit $\varepsilon \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ existiert.*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\exists! \tilde{\varphi}"'] \arrow[rr, bend left, "\forall \varphi"] \arrow[d, "\alpha_B"'] & S_\mathcal{A} \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\alpha_S"] & A \arrow[dd, "\alpha_A"] \\
FB \arrow[r, dashed, "F(\tilde{\varphi})"'] \arrow[d, "\nu_B"'] & F(S_\mathcal{A}) \arrow[d, "\nu_{S_\mathcal{A}}"] & \\
GB \arrow[r, dashed, "G(\tilde{\varphi})"] \arrow[rr, bend right, "G(\varphi)"'] & G(S_\mathcal{A}) \arrow[r, "G(\varepsilon)"] & GA
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{S}_\mathcal{A}$ ist eine Untercoalgebra der cofreien F-Coalgebra über der Farbmenge A.

Beweis. Wir beginnen mit der cofreien F-Coalgebra $(\mathfrak{T}(A), \rho_A : \mathfrak{T}(A) \to F(\mathfrak{T}(A)), \varepsilon_A : \mathfrak{T}(A) \to A)$ über der Farbmenge A. Sei

$$(S_\mathcal{A}, \alpha_S) := [\mathrm{eq}(\alpha_A \circ \varepsilon_A, G(\varepsilon_A) \circ \nu_{\mathfrak{T}(A)} \circ \rho_A)]$$

die größte F-Untercoalgebra von $\mathfrak{T}(A)$, die im Equalizer der Abbildungen $\alpha_A \circ \varepsilon_A$ und $G(\varepsilon_A) \circ \nu_{\mathfrak{T}(A)} \circ \rho_A$ enthalten ist. Dann ist

$$\varepsilon := \varepsilon_A \circ \leq : (S_\mathcal{A}, \nu_{S_\mathcal{A}} \circ \alpha_S) \to (A, \alpha_A)$$

ein G-Homomorphismus. Das folgende Diagramm zeigt die beteiligten Abbildungen (man beachte, daß das rechte Rechteck i.a. nicht kommutiert):

$$\begin{tikzcd}
S_\mathcal{A} \arrow[r, hook, "\leq"] \arrow[d, "\alpha_S"'] & \mathfrak{T}(A) \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "\rho_A"] & A \arrow[dd, "\alpha_A"] \\
F(S_\mathcal{A}) \arrow[r, hook, "F(\leq)"] \arrow[d, "\nu_{S_A}"] & F(\mathfrak{T}(A)) \arrow[d, "\nu_{\mathfrak{T}(A)}"] & \\
G(S_\mathcal{A}) \arrow[r, hook, "G(\leq)"] & G(\mathfrak{T}(A)) \arrow[r, "G(\varepsilon_A)"] & GA
\end{tikzcd}$$

Wir müssen zeigen, daß das äußere Quadrat kommutiert; da die beiden linken Quadrate nach Voraussetzung kommutieren, ist nur $G(\varepsilon_A) \circ \nu_{\mathfrak{T}(A)} \circ \rho_A \circ \leq = \alpha_A \circ \varepsilon_A \circ \leq$ zu zeigen - das folgt aber sofort aus der Definition von $S_\mathcal{A}$.

Wir behaupten, daß $(\mathcal{S}_A, \alpha_S)$ zusammen mit ε die gewünschte universelle Eigenschaft hat: Seien $\mathcal{B} = (B, \alpha_B)$ eine F-Coalgebra, $\varphi : (B, \nu_B \circ \alpha_B) \to (A, \alpha_A)$ ein G-Homomorphismus. Dann ist φ insbesondere eine Abbildung $\varphi : B \to A$, also eine A-Färbung von B, wir erhalten also einen eindeutigen F-Homomorphismus $\bar{\varphi} : \mathcal{B} \to \mathfrak{T}(A)$ mit $\varepsilon_A \circ \bar{\varphi} = \varphi$.

Das einzige, was wir noch zeigen müssen, ist, daß $\bar{\varphi}$ durch $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ faktorisiert. Das folgt aber aus

$$\alpha_A \circ \varepsilon_A \circ \bar{\varphi} = \alpha_A \circ \varphi = G(\varphi) \circ \nu_B \circ \alpha_B = G(\varepsilon_A \circ \bar{\varphi}) \circ \nu_B \circ \alpha_B = \\ = G(\varepsilon_A) \circ \nu_{\mathfrak{T}(A)} \circ F(\bar{\varphi}) \circ \alpha_B = G(\varepsilon_A) \circ \nu_{\mathfrak{T}(A)} \circ \rho_A \circ \bar{\varphi}.$$

$\square$

In [**Rut00b**] wird dieser Satz unter der zusätzlichen Voraussetzung bewiesen, daß F schwache Pullbacks erhält. Dieser Beweis enthält allerdings eine Lücke. Wie für cofreie Coalgebren über Farbmengen beweist man auch hier, daß die Bildung cofreier Coalgebren funktoriell ist und der so entstehende Funktor rechtsadjungiert zum Funktor $\nu \circ (-) : \mathbf{Set}_F \to \mathbf{Set}_G$ ist.

Wir haben in Behauptung 3.53 gesehen, daß man eine terminale Coalgebra erhalten kann, indem man eine schwach terminale Coalgebra nach der größten Kongruenz faktorisiert. Für Produkte gilt entsprechend:

Lemma 5.44. *Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I} \subseteq \mathbf{Set}_F$ eine Familie von F-Coalgebren, $(\mathcal{P}, (\pi_i : \mathcal{P} \to \mathcal{A}_i)_{i \in I})$ ein schwaches Produkt der $\mathcal{A}_i$. Dann ist*

$$\mathcal{P}' := \mathcal{P} / \bigwedge \operatorname{Ker} \pi_i$$

zusammen mit den eindeutigen Homomorphismen $\pi_i' : \mathcal{P}' \to \mathcal{A}_i$, die folgendes Diagramm kommutieren lassen, ein Produkt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ in $\mathbf{Set}_F$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_i & \mathcal{P}' \arrow[l, dashed, "\pi_i'"'] \\ & \mathcal{P} \arrow[ul, "\pi_i"] \arrow[u, two heads, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

Damit können wir jetzt beweisen:

Satz 5.45. *Seien F ein Covarietor, $\nu : F \overset{\bullet}{\twoheadrightarrow} G$ eine surjektive natürliche Transformation, $(\mathcal{A}_i)_{i \in I} \subseteq \mathbf{Set}_G$. Für jedes $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i'$ mit dem G-Homomorphismus $\varepsilon_i : \nu(\mathcal{A}_i') \to \mathcal{A}_i$ eine cofreie F-Coalgebra über $\mathcal{A}_i$. Wenn das Produkt $(\prod_{F, i \in I} \mathcal{A}_i', (\pi_i : \prod_{F, i \in I} \mathcal{A}_i' \to \mathcal{A}_i')_{i \in I})$ der $\mathcal{A}_i'$ in $\mathbf{Set}_F$ existiert, dann ist $(\nu(\prod_{F, i \in I} \mathcal{A}_i'), (\varepsilon_i \circ \pi_i)_{i \in I})$ ein schwaches Produkt der $\mathcal{A}_i$ in $\mathbf{Set}_G$. Insbesondere existiert das Produkt der $\mathcal{A}_i$ in $\mathbf{Set}_G$ und ist ein Quotient von $\nu(\prod_{F, i \in I} \mathcal{A}_i')$.*

Beweis. Sei $(\mathcal{C} \in \mathbf{Set}_G, (\varphi_i : \mathcal{C} \to \mathcal{A}_i)_{i \in I})$ ein Konkurrent von $(\nu(\prod_{F, i \in I} \mathcal{A}_i'), (\varepsilon_i \circ \pi_i)_{i \in I})$. Wir können nach Voraussetzung eine F-Coalgebra $\hat{\mathcal{C}}$ wählen, so daß $\nu(\hat{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}$ ist. Dann existieren nach der universellen Eigenschaft der verallgemeinerten cofreien Coalgebren (eindeutige) F-Homomorphismen $\widetilde{\varphi}_i : \hat{\mathcal{C}} \to \mathcal{A}_i'$ mit $\varepsilon_i \circ \widetilde{\varphi}_i = \varphi_i$, also ein (eindeutiger) F-Homomorphismus $(\widetilde{\varphi}_i)_{i \in I} : \hat{\mathcal{C}} \to \prod_{F, i \in I} \mathcal{A}'$ mit $\pi_i \circ (\widetilde{\varphi}_i)_{i \in I} = \widetilde{\varphi}_i$. Dann ist aber $\varepsilon_i \circ \pi_i \circ (\widetilde{\varphi}_i)_{i \in I} = \varepsilon_i \circ \widetilde{\varphi}_i = \varphi_i$ ein G-Homomorphismus $\nu(\hat{\mathcal{C}}) = \mathcal{C} \to \nu(\prod_{F, i \in I} \mathcal{A}_i') \to \mathcal{A}_i$, was die Behauptung beweist. Der Rest der Behauptung folgt aus Lemma 5.44.

$$\begin{tikzcd}
\prod \mathcal{A}'_i \arrow[d, "\pi_i"'] & \\
\mathcal{A}'_i \arrow[d, "\varepsilon_i"'] & \hat{\mathcal{C}} \arrow[l, "\widetilde{\varphi_i}"] \arrow[ul, "(\widetilde{\varphi_i})"'] \\
\mathcal{A}_i & \mathcal{C} \arrow[l, "\varphi_i"]
\end{tikzcd}$$

□

10. Beschränktheit und Limeserhaltung

Weiß man, daß ein beschränkter Funktor bestimmte Limites erhält, kann man daraus das Erhalten anderer Limites schließen. Umgekehrt sind Funktoren, die bestimmte Limites erhalten, immer beschränkt.

Satz 5.46. *Ist F κ-residuell für eine Kardinalzahl κ, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *F erhält alle Schnitte.*
(2) *F erhält κ-Schnitte.*

Beweis. (1)⇒(2) ist offensichtlich. (2)⇒(1): F erhalte κ-Schnitte. Wir zeigen, daß einserzeugte Untercoalgebren existieren, was nach Satz 4.36 ausreicht. Seien also $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$, $a \in A$ gegeben. Wir müssen zeigen, daß $\bigcap\{U \leq \mathcal{A} \mid a \in U\}$ eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$ ist. Wir können nach Voraussetzung eine Untercoalgebra U_0 von $\mathcal{A}$ mit $|U_0| \leq \kappa$ und $a \in U_0$ wählen. Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\bigcap\{U \leq \mathcal{A} \mid a \in U\} \\
=&\bigcap\{U \leq \mathcal{U}_0 \mid a \in U\} \\
=&\bigcap\{[U_0 \backslash \{u\}] \mid \exists U \leq \mathcal{U}_0 . a \in U, u \notin U\},
\end{aligned}$$

und die rechte Seite ist nach Lemma 4.41 eine F-Untercoalgebra. □

Ein ähnlicher Beweis zeigt:

Satz 5.47. *Sei F κ-residuell für eine Kardinalzahl κ. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *F erhält Urbilder*
(2) *Für alle Abbildungen $f : A \to B$ und alle Teilmengen $U \subseteq B$ mit $|U| \leq \kappa$ erhält F das Urbild von U unter f. Kurz: F erhält Urbilder von Mengen der Kardinalität $\leq \kappa$.*
(3) *Ist $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein F-Homomorphismus und U eine Untercoalgebra von $\mathcal{B}$ mit $|U| \leq \kappa$, so ist $\varphi^{-}[U]$ eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$.*
(4) *Ist $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein F-Homomorphismus und U eine Untercoalgebra von $\mathcal{B}$ so ist $\varphi^{-}[U]$ eine Untercoalgebra von $\mathcal{A}$.*

Es zeigt sich, daß Funktoren, die bestimmte Klassen von Limites erhalten, immer beschränkt sind:

Satz 5.48 ([**Trn69**], Lemma 3.4). *Wenn F beliebige Schnitte und Equalizer erhält, ist F beschränkt. Insbesondere (Satz 4.30) ist F beschränkt, wenn F alle mono-sourcen erhält.*

Trnková beweist ([**Trn71a**], Note VIII.4): Wenn in der zugrundeliegenden Mengenlehre eine echte Klasse von meßbaren Kardinalzahlen existiert, dann gibt es für jede unendliche Kardinalzahl κ einen unbeschränkten Funktor F, der κ-monosourcen erhält. Kürzlich haben Adámek, Koubek und Trnkoá in [**AKT01**] bewiesen, daß sogar gilt: Die Aussage, daß jeder **Set**-Endofunktor, der alle endlichen Limites erhält, beschränkt ist, ist unabhängig von den Axiomen der Mengenlehre.

11. Mengenbasierte Funktoren auf Klassen

Einige Artikel, die sich mit Coalgebren beschäftigen, arbeiten nicht in der Kategorie **Set** der Mengen, sondern in der (Meta-)Kategorie **Class** der Klassen, z.B. [**AM89, Mos99**]. So wird in [**AM89**] bewiesen, daß für einen Funktor $F : \mathbf{Class} \to \mathbf{Class}$, der *mengenbasiert* ist, für den also für jede Klasse $\mathcal{K}$

$$(*) \quad F(\mathcal{K}) = \bigcup\{F(\subseteq_U^{\mathcal{K}})[FU] \mid U \in \mathbf{Set}, U \subseteq \mathcal{K}\}$$

gilt, eine terminale Coalgebra in $\mathbf{Class}_F$ existiert. Man könnte die gesamte bislang entwickelte Coalgebra auch in der Kategorie $\mathbf{Class}_F$ durchführen (in [**Sch97**] wird gezeigt, daß sich die meisten Konstruktionen in $\mathbf{Class}_F$ genau wie in $\mathbf{Set}_F$ durchführen lassen), allerdings ist damit nicht viel gewonnen, da die Theorien im wesentlichen äquivalent sind: Ist $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ ein standard-Funktor, so kann man F durch die Formel $(*)$ zu einem mengenbasierten Funktor auf **Class** fortsetzen. Wenn man die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl $\kappa > \omega$ in **Set** voraussetzt, was konsistent mit der "üblichen" Mengenlehre ist ([**CK73**]), so kann man innerhalb von **Set** ein neues Modell $\mathbf{Set}'$ der Mengenlehre konstruieren, indem man als Mengen von $\mathbf{Set}'$ die Mengen von **Set** der Kardinalität $< \kappa$ wählt. Dann sind die Klassen von $\mathbf{Set}'$ gerade die Mengen von **Set** der Kardinalität $\leq \kappa$, und ein Funktor $F : \mathbf{Set}' \to \mathbf{Set}'$ ist genau dann mengenbasiert, wenn der Funktor

$$F_{\mathbf{Set}} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}, A \mapsto \bigcup\{F(\subseteq_U^A)[FU] \mid U < \kappa\}$$

strikt κ-beschränkt ist; umgekehrt liefert dann jeder strikt κ-beschränkte Funktor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ durch Einschränkung auf $\mathbf{Class}'$, die Kategorie der Klassen von $\mathbf{Set}'$-Mengen, einen mengenbasierten Funktor auf $\mathbf{Class}'$. Mengenbasierte $\mathbf{Class}'$-Funktoren lassen sich also als spezielle beschränkte **Set**-Funktoren auffassen.

Indem man so $\mathbf{Class}'$-Funktoren als **Set**-Funktoren betrachtet, kann man manche Aussagen über $\mathbf{Class}'$-Funktoren umformulieren. Das *small subcoalgebra lemma* aus [**AM89**] z.B. besagt: Wenn $F : \mathbf{Class}' \to \mathbf{Class}'$ ein mengenbasierter Funktor ist, dann gibt es für jede F-Coalgebra $\mathcal{A}$ und jedes $a \in A$ eine Untercoalgebra $\mathcal{U}_a$ von $\mathcal{A}$ mit $a \in U_a$, die eine Menge ist. Umformuliert bedeutet das einfach: Ist F strikt κ-beschränkt, wobei κ die oben angenommene unerreichbare Kardinalzahl ist, so besitzt jede F-Coalgebra $\mathcal{A}$ für jedes $a \in A$ eine Untercoalgebra $\mathcal{U}_a$ mit $a \in U_a$ und $|U_a| < \kappa$. Ein weiteres Beispiel: In [**AM89**] wird bewiesen, daß eine Coalgebra $\mathcal{T}$ des mengenbasierten Funktors $F : \mathbf{Class} \to \mathbf{Class}$ genau dann terminal ist, wenn für jede F-Coalgebra $\mathcal{A}$, deren Träger eine Menge ist, genau ein Homomorphismus $\mathcal{A} \to \mathcal{T}$ existiert; übersetzt man diese Aussage, erhält man gerade Satz 5.16.

12. Modallogik für Coalgebren

Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Coalgebren eines Funktors F, so ist für zwei Zustände $a \in A$, $b \in B$ die intendierte Semantik der Aussage "a und b sind bisimilar": a und b sind ununterscheidbar unter Beobachtungen. Aber wie kann man feststellen, ob sich zwei Zustände gleich verhalten? Die Idee liegt nahe, das mit Formeln zu "testen", d.h., eine Sprache $\mathcal{L}_F$ zu definieren, die sich auf Zuständen von F-Coalgebren interpretieren läßt, so daß zwei Zustände genau dann dieselben Formeln erfüllen, wenn sie bisimilar sind. Wünschenswert ist, daß $\mathcal{L}_F$ *charakterisierende Formeln* enthält, d.h., daß es für jeden Zustand a in jeder F-Coalgebra $\mathcal{A}$ eine Formel $\mathfrak{f}^a \in \mathcal{L}_F$ gibt, so daß für alle F-Coalgebren $\mathcal{B}$ und alle $b \in B$ gilt: Die Formel $\mathfrak{f}^a$ gilt in b genau dann, wenn a und b bisimilar sind.

Für Funktoren, die schwache Pullbacks erhalten und beschränkt sind, kann man eine solche Sprache leicht angeben: Es gibt eine terminale F-Coalgebra $\mathfrak{T}(1)$, wir wählen $\mathcal{L}_F := \mathfrak{T}(1)$ und definieren für eine F-Coalgebra $\mathcal{A}$, jedes $a \in A$ und $\mathfrak{f} \in \mathfrak{T}(1)$

$$a \models \mathfrak{f} :\iff !_{\mathcal{A}}(a) = \mathfrak{f}.$$

Wenn man dann noch $\mathfrak{f}^a := !_{\mathcal{A}}(a)$ setzt, erhält man eine Sprache mit den gewünschten Eigenschaften (Behauptung 4.32).

Diese Wahl ist gar nicht so speziell, wie sie auf den ersten Blick erscheint, denn da die terminale F-Coalgebra $\mathfrak{T}(1)$ genau einen Vertreter jeder Bisimilaritätsklasse von Zuständen enthält, kann man, wenn in einer Sprache $\mathcal{L}_F$ charakterisierende Formeln existieren, diese immer als Elemente einer terminalen F-Coalgebra auffassen.

Die Wahl $\mathcal{L}_F := \mathfrak{T}(1)$ hat allerdings einen offensichtlichen Nachteil: es fehlt jegliche syntaktische Komponente, die "Formeln" haben keinen Bezug zueinander. Es ist daher wünschenswert, nach anderen Darstellungen von charakterisierenden Formeln zu suchen, diese Formeln durch einfachere zu approximieren. Larry Moss schreibt in [**Mos99**]:

> Ever since people looked at final coalgebras as models of intensional phenomena, there was a question of getting representations of the final coalgebras in terms of some sort of entities that served as approximations.

Dieser und die nächsten beiden Abschnitten beschäftigen sich damit, die von Larry Moss entwickelte *Coalgebraische Logik* im Kontext beschränkter Funktoren zu formulieren mit einer über die *terminale Sequenz von F* definierbaren Logik zu vergleichen.

12.1. Unendlichstellige Modallogik. Seien im ganzen Abschnitt Φ eine Menge von atomaren Aussagen, $\kappa \geq |\Phi|$ eine unendliche reguläre Kardinalzahl. Wir betrachten die κ-stellige Modallogik $\mathcal{L}_\kappa(\Phi)$ über Φ (vgl. auch Kapitel 2), d.h.: jede atomare Aussage $p \in \Phi$ ist eine Formel, für jede Formel $\mathfrak{f}$ sind auch $\Diamond\mathfrak{f}$ und $\neg\mathfrak{f}$ Formeln, und für jede Formelmenge S mit $|S| \leq \kappa$ ist $\bigwedge S$ eine Formel. Wir führen als Abkürzung auch noch $\Box\mathfrak{f} := \neg\Diamond\neg\mathfrak{f}$ ein und setzen $\top := \bigwedge\emptyset$. Durch die Beschränkung der Kardinalität ist $\mathcal{L}_\kappa(\Phi)$ wirklich eine Menge - würde man Konjunktionen beliebiger Kardinalität zulassen, erhielte man eine echte Klasse. Die Semantik von Formeln aus $\mathcal{L}_\kappa(\Phi)$ wird wie im Falle der endlich-stelligen Modallogik definiert.

Für jede Menge $S \subseteq \mathcal{L}(\Phi)$ von Formeln mit $|S| \leq \kappa$ und jede Menge $T \subseteq \Phi$ von atomaren Aussagen definiert man die Formel

$$\Delta(S,T) := \left(\Box \bigvee S \wedge \bigwedge \Diamond S \wedge \bigwedge_{p \in T} p \wedge \bigwedge_{p \notin T} \neg p\right) \in \mathcal{L}_\kappa(\Phi),$$

wobei $\Diamond S$ für $\{\Diamond\mathfrak{f} \mid \mathfrak{f} \in S\}$ steht. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}_\kappa(\Delta)$ das kleinste Fragment von $\mathcal{L}_\kappa(\Phi)$, das gegen $\bigwedge$ und $\Delta(-,T)$ für beliebige $T \subseteq \Phi$ abgeschlossen ist.

Sei jetzt $\mathcal{A} = (A, \mathrm{prop}_A, \mathrm{succ}_A) \in \mathbf{Set}_{\mathcal{P}(\Phi)\times\mathcal{P}_{<\kappa}(-)}$ eine strikt κ-beschränkte Kripke-Struktur. Dann lassen sich für ein a durch Ordinalzahleninduktion über

$\lambda \in \mathrm{Ord}$, $\lambda \leq \kappa$, Formeln $\mathfrak{f}^a_\lambda \in \mathcal{L}_\kappa(\Delta)$ definieren, sogenannte *kanonische Formeln*:

$$\mathfrak{f}^a_0 := \top;$$
$$\mathfrak{f}^a_{\beta+1} := \Delta(\{\mathfrak{f}^b_\beta \mid a \to b\}, \mathrm{prop}_A(a))$$
$$\mathfrak{f}^a_\lambda := \bigwedge\{\mathfrak{f}^a_\gamma \mid \gamma < \lambda\} \text{ für Limeszahlen } \lambda \leq \kappa.$$

Man kann dann wie in[**Mos99**] beweisen, daß $\mathfrak{f}^a_\kappa$ eine *charakterisierende Formel für* a ist, d.h., für jedes $\mathcal{B} \in \mathbf{Set}_{\mathcal{P}(\Phi)\times\mathcal{P}_{<\kappa}(-)}$ und jedes $b \in B$ gilt

$$a \sim b \iff b \models \mathfrak{f}^a_\kappa.$$

12.2. Coalgebraische Logik. Jetzt führen wir Larry Moss' "Coalgebraische Logik" ([**Mos99**]) für einen Funktor F ein. Wie Moss setzen wir voraus, daß F schwache Pullbacks erhält und standard ist. Wir setzen zusätzlich voraus, daß F strikt κ-beschränkt für eine reguläre Kardinalzahl κ ist, damit wir in der Kategorie **Set** arbeiten können. Moss arbeitet in [**Mos99**] in der Kategorie der Klassen und setzt dann voraus, daß F mengenbasiert ist, was man ebenfalls als Beschränktheitsforderung verstehen kann, wie wir in Abschnitt 11 gesehen haben.

Wir definieren die *κ-stellige F-Sprache* $\mathcal{L}^\kappa_F$ als die kleinste Menge, die gegen $\mathcal{P}_{\leq\kappa}$ und F abgeschlossen ist, also die kleinste Menge L, für die $\mathcal{P}_{\leq\kappa}(L) \subseteq L$ und $F(L) \subseteq L$ gilt. Man kann beweisen (s. z.B. [**Mos99, Sch97**]), daß eine solche Menge existiert, und daß $\mathcal{L}^\kappa_F$ dann sogar der kleinste Fixpunkt des Funktors $\mathcal{P}_{\leq\kappa}+F$ ist, d.h., daß $\mathcal{L}^\kappa_F = \mathcal{P}_{\leq\kappa}(\mathcal{L}^\kappa_F) + F(\mathcal{L}^\kappa_F)$ gilt. Die zwei kanonischen Einbettungen dieser Summe bezeichnen wir mit $\bigwedge : \mathcal{P}_{\leq\kappa}(\mathcal{L}^\kappa_F) \hookrightarrow \mathcal{L}^\kappa_F$ und $\mathrm{inr} : F(\mathcal{L}^\kappa_F) \hookrightarrow \mathcal{L}^\kappa_F$.

Ist $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ eine F-Coalgebra, so wollen wir definieren, wann eine Formel $\mathfrak{f} \in \mathcal{L}_F$ in einem Zustand $a \in A$ gilt. Die Gültigkeitsrelation $\models \subseteq A \times \mathcal{L}_F$ sei definiert als die kleinste Relation, die gegen folgende Herleitungsregeln abgeschlossen ist:

- Konjunktion (für $S \subseteq \mathcal{L}_F, |S| \leq \kappa$):
$$\frac{\forall \mathfrak{f} \in S. a \models \mathfrak{f}}{a \models \bigwedge S}$$
- F-Regel (für $\mathfrak{f} \in F(\mathcal{L}_F)$, $w \in F(\models)$):
$$\frac{\alpha_A a = (F\pi_1)(w), \mathfrak{f} = (F\pi_2)(w)}{a \models \mathrm{inr}(\mathfrak{f})}$$

wobei in der zweiten Klausel $\pi_1 : \models \to A$, $\pi_2 : \models \to \mathcal{L}_F$ die Projektionen sind. Larry Moss nennt das in der zweiten Klausel auftretende w einen *Grund für* $a \models \mathrm{inr}(\mathfrak{f})$.

Beispiel 5.49 ([**Mos99**]): $\mathcal{L}^\kappa_F$ ist eine Verallgemeinerung von $\mathcal{L}_\kappa(\Delta)$: Ist $F = \mathcal{P}(\Phi) \times \mathcal{P}_{<\kappa}$ mit $|\Phi| < \kappa$, so ist die Abbildung $(-)^t : \mathcal{L}_\kappa(\Delta) \to \mathcal{L}_F$, definiert induktiv durch

$$(\bigwedge S)^t := \bigwedge(S^t), \quad (\Delta(S,T))^t := \mathrm{inr}((T, S^t)),$$

wobei $S^t := \{\mathfrak{f}^t \mid \mathfrak{f} \in S\}$ gesetzt wurde, eine Bijektion, und für jede Formel $\mathfrak{f} \in \mathcal{L}_\kappa(\Delta)$ sind $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}^t$ semantisch äquivalent.

Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{Set}_F$ zwei F-Coalgebren, κ eine Kardinalzahl, so nennen wir zwei Zustände $a \in A$ und $b \in B$ *$\mathcal{L}^\kappa_F$-äquivalent*, wenn sie dieselben Formeln der Sprache $\mathcal{L}^\kappa_F$ erfüllen. Eine erste wichtige Eigenschaft der eben definierten Semantik ist ([**Mos99**]), daß bisimilare Zustände $\mathcal{L}^\kappa_F$-äquivalent für jedes κ sind.

Um auch eine Umkehrung davon für geeignete κ zu beweisen, werden in [**Mos99**] *kanonische Formeln* definiert. Dazu definieren wir für jedes $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ und jede Ordinalzahl $\gamma \leq \kappa$ eine Abbildung $\mathfrak{f}^{\mathcal{A}}_\gamma : A \to \mathcal{L}_F$:

$$\mathfrak{f}^{\mathcal{A}}_0 := \top = \bigwedge \emptyset;$$
$$\mathfrak{f}^{\mathcal{A}}_{\gamma+1} := \mathrm{inr} \circ F(\mathfrak{f}^{\mathcal{A}}_\gamma) \circ \alpha_A,$$

und für Limeszahlen $\gamma \leq \kappa$

$$\mathfrak{f}_{\gamma}^{\mathcal{A}} := \bigwedge \{ \mathfrak{f}_{\gamma'}^{\mathcal{A}} \mid \gamma' < \gamma \}$$

Mit Hilfe dieser kanonischen Formeln kann man wie in [**Mos99**] beweisen:

SATZ 5.50. *$\mathcal{L}_F^{\kappa}$-äquivalente Zustände sind bisimilar. Insbesondere ist für jedes $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$ und jedes $a \in A$ die Formel $\mathfrak{f}_{\kappa^+}(a) \in \mathcal{L}_F^{\kappa^+}$ eine charakterisierende Formel für a.*

In [**Mos99**] weist Larry Moss - umformuliert in unsere Sprache - nach, daß schon die Formel $\mathfrak{f}_{\kappa}(a)$ charakterisierend ist, wenn der Funktor F *uniform* ist. Ein Nachteil des Begriffes des uniformen Funktors ist allerdings - sieht man davon ab, daß die Beweise mittels dieses Begriffs sehr technisch sind -, daß Uniformität nicht unter natürlicher Isomorphie erhalten bleibt: der Identitätsfunktor $\mathcal{I}$ ist nicht uniform, während der Funktor $1 \times \mathcal{I}$ uniform ist.

Eine andere Art der Approximation, bei der der Zusammenhang zur terminalen Coalgebra noch deutlicher wird, bedient sich der *terminalen Sequenz eines Funktors.* Dies wird im nächsten Abschnitt untersucht.

13. Terminale Sequenzen

Eine Möglichkeit, eine terminale Coalgebra durch Approximationen zu konstruieren, sind *terminale Sequenzen* ([**Wor99b, Wor00, AK95**]), die man als Verallgemeinerung der Konstruktion des größtes Fixpunktes eines Verbandsendomorphismus verstehen kann. Die duale Konstruktion findet sich z.B. in Barrs Artikel [**Bar92**].

SATZ 5.51 ([**Wor99b**]). *Sei F ein Funktor. Für jede Ordinalzahl λ gibt es eine Menge $F^{\lambda}(1)$ und für jedes $\kappa \leq \lambda$ eine Abbildung $f_{\kappa}^{\lambda} : F^{\lambda}(1) \to F^{\kappa}(1)$, die folgende Eigenschaften haben:*

1. $F^0(1) = 1$.
2. $F^{\lambda+1}(1) = F(F^{\lambda}(1))$.
3. $f_{\kappa+1}^{\lambda+1} = F(f_{\kappa}^{\lambda})$.
4. $f_{\lambda}^{\lambda} = \mathrm{id}_{F^{\lambda}(1)}$.
5. *Für jedes $\delta \leq \gamma \leq \lambda$ gilt $f_{\delta}^{\lambda} = f_{\delta}^{\gamma} \circ f_{\gamma}^{\lambda}$.*
6. *Ist λ eine Limeszahl, so ist der Kegel $(F^{\lambda}(1), f_{\kappa}^{\lambda} : F^{\lambda}(1) \to F^{\kappa}(1))_{\kappa<\lambda}$ ein Limes in* $\mathbf{Set}$.

Die Folge $(F^{\lambda}(1))_{\lambda \in \mathrm{Ord}}$ nennen wir die terminale Sequenz von F.

Im Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
1 & F^1(1) \arrow[l, "f_0^1"'] & F^2(1) \arrow[l, "f_1^2"'] & F^3(1) \arrow[l, "f_2^3"'] & \cdots \arrow[l, "f_3^4"'] \\
& & F^{\omega}(1) \arrow[ull, "f_0^{\omega}"] \arrow[ul, "f_1^{\omega}"] \arrow[u, "f_2^{\omega}"] \arrow[ur, "f_3^{\omega}"'] \arrow[urr, "f_4^{\omega}"'] & & \\
& & F^{\omega+1}(1) \arrow[u, "f_{\omega}^{\omega+1}"'] & & \\
& & \vdots \arrow[u, "f_{\omega+1}^{\omega+2}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Wenn eine Ordinalzahl κ existiert, so daß $f_\kappa^{\kappa+1} : F(F^\kappa(1)) \to F^\kappa(1)$ ein Isomorphismus ist, dann sagen wir, daß die terminale Sequenz von F *(in κ Schritten) konvergiert*. Das entscheidende Ergebnis in diesem Zusammenhang ist:

HAUPTSATZ 5.52 ([**AK95**]). *Die terminale Sequenz von F konvergiert genau dann, wenn eine terminale F-Coalgebra existiert. Wenn die terminale Sequenz von F in $\kappa + 1$ Schritten konvergiert, dann ist $(F^\kappa(1), (f_\kappa^{\kappa+1})^{-1})$ eine terminale F-Coalgebra.*

Auch der Homomorphismus in die terminale Coalgebra läßt sich durch eine Approximation beschreiben:

SATZ 5.53 ([**Bar92, Wor00**]). *Sei $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_F$. Dann gibt es in* **Set** *genau einen kompatiblen Kegel $(h_\lambda^{\mathcal{A}} : A \to F^\lambda(1))_{\lambda \in \mathrm{Ord}}$ über der terminalen Sequenz, so daß $h_{\lambda+1}^{\mathcal{A}} = F(h_\lambda^{\mathcal{A}}) \circ \alpha_A$ für alle Ordinalzahlen λ gilt.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h^{\mathcal{A}}_{\lambda+1}"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & F^{\lambda+1}(1) \\
FA \arrow[ur, "F(h^{\mathcal{A}}_\lambda)"'] &
\end{tikzcd}$$

Für Limeszahlen λ und $\beta < \lambda$ gilt dann $f_\beta^\lambda \circ h_\lambda^{\mathcal{A}} = h_\beta^{\mathcal{A}}$, und $h_\lambda^{\mathcal{A}}$ ist dadurch eindeutig bestimmt. Wenn $F^\kappa(1)$ eine terminale F-Coalgebra ist, dann ist $h_\kappa^{\mathcal{A}}$ der eindeutige F-Homomorphismus $\mathcal{A} \to F^\kappa(1)$.

Wir benötigen unten noch folgende Beobachtungen:

SATZ 5.54. *Es gilt:*

1. *Ist G ein Unterfunktor von F, so gilt $G^\lambda(1) \subseteq F^\lambda(1)$ für alle $\lambda \in \mathrm{Ord}$; sind für $\lambda \leq \kappa \in \mathrm{Ord}$ die Abbildungen $g_\lambda^\kappa : G^\kappa(1) \to G^\lambda(1)$ die Abbildungen der terminalen Sequenz von G, so sind die g_λ^κ die Einschränkungen der f_λ^κ.*
2. *Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{Set}_F$, $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein F-Homomorphismus, dann gilt $h_\lambda^{\mathcal{A}} = h_\lambda^{\mathcal{B}} \circ \varphi$ für alle Ordinalzahlen λ.*
3. *Ist $\mathcal{A} \in \mathbf{Set}_{F_{<\kappa}}$, $(h_\lambda^{\mathcal{A}} : A \to F^\lambda(1))_{\lambda \in \mathrm{Ord}}$ der Kegel über der terminalen F-Sequenz, $({h'}_\lambda^{\mathcal{A}} : A \to F_{<\kappa}^\lambda(1))_{\lambda \in \mathrm{Ord}}$ der Kegel über der terminalen $F_{<\kappa}$-Sequenz, so sind die Abbildungen ${h'}_\lambda^{\mathcal{A}}$ Wertebereichs-Einschränkungen von $h_\lambda^{\mathcal{A}}$, insbesondere gilt $\mathrm{Ker}\, h_\lambda^{\mathcal{A}} = \mathrm{Ker}\, {h'}_\lambda^{\mathcal{A}}$ für alle $\lambda \in \mathrm{Ord}$.*

Der folgende Hauptsatz gibt Informationen darüber, wie schnell die terminale Sequenz konvergiert:

HAUPTSATZ 5.55 ([**Wor00**]). *Sei F ein Funktor. Wenn in der terminalen Sequenz von F für eine reguläre Kardinalzahl κ die Abbildung $f_\kappa^{\kappa+1}$ injektiv ist, dann konvergiert die terminale Sequenz von F in höchstens $\kappa + \kappa$ Schritten gegen die terminale F-Coalgebra. Ist F strikt κ-beschränkt, so ist $f_\kappa^{\kappa+1}$ injektiv.*

KOROLLAR 5.56 ([**GS01d**]). *Wenn F ω-mono-sourcen erhält, dann ist F ein Covarietor. Insbesondere ist $\mathbf{Set}_F$ vollständig.*

BEWEIS. F erhalte ω-mono-sourcen. Dann erhält auch $C \times F$ ω-mono-sourcen für jede Farbmenge C, also müssen wir nur zeigen, daß $\mathbf{Set}_F$ eine terminale Coalgebra hat. Dazu zeigen wir, daß $f_\omega^{\omega+1} : F^{\omega+1}(1) \to F^\omega(1)$ injektiv ist: Der Kegel $(F^\omega(1), f_n^\omega : F^\omega(1) \to F^n(1)_{n \in \mathbb{N}})$ ist ein Limes, insbesondere also ein ω-mono-source. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $F(f_n^\omega) = f_n^\omega \circ f_\omega^{\omega+1}$. Die linke Seite ist nach Voraussetzung ein mono-source. Sind $g, h : A \to F^{\omega+1}(1)$ zwei Abbildungen mit $f_\omega^{\omega+1} \circ g = f_\omega^{\omega+1} \circ h$, so folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$F(f_n^\omega) \circ g = F(f_n^\omega) \circ h,$$

also $g = h$, was die Injektivität von $f_\omega^{\omega+1}$ zeigt. □

14. Beschränkte Bisimilarität und beschränkte Kongruenz

Ziel dieses Abschnittes ist es, den in Definition 3.23 eingeführten Begriff der λ-Bisimilarität mit der terminalen Sequenz in Beziehung zu setzen. Dazu zeigen wir, wie man die größte Kongruenz auf $\mathcal{A}$ durch den Kegel von $\mathcal{A}$ in die terminale Sequenz approximieren kann. Dies ist eine Verallgemeinerung der Konstruktion aus [**Wor99a**]. Wir werden sehen, daß man die in Abschnitt 12 diskutierte Coalgebraische Logik als Spezialfall einer so entstehenden F-Logik verstehen kann. Wir setzen im ganzen Abschnitt voraus:

- F ist für eine unendliche reguläre Kardinalzahl κ strikt κ-beschränkt. Nach den Hauptsätzen 5.55 und 5.52 ist dann $(F^{\kappa+\kappa}(1), (f_{\kappa+\kappa}^{\kappa+\kappa+1})^{-1})$ die terminale F-Coalgebra.
- $\mathcal{A}$ ist eine F-Coalgebra. Mit $(h_\lambda^\mathcal{A} : A \to F^\lambda(1))_{\lambda\in\mathrm{Ord}}$ bezeichnen wir den in Satz 5.53 konstruierten Kegel über der terminalen Sequenz.

Lemma 5.57. 1. *Die Folge* $(\mathrm{Ker}\, h_\lambda^\mathcal{A})_{\lambda\in\mathrm{Ord}}$ *der Kerne der Abbildungen in die terminale Sequenz ist fallend.*
2. *Es gilt* $\mathrm{Ker}\, h_\kappa = \nabla_\mathcal{A}$, *also* $\mathrm{Ker}\, h_\lambda \supseteq \nabla_A$ *für jedes* $\lambda \in \mathrm{Ord}$.

Beweis. (1): Nach der Kegelbedingung gilt im Nachfolgerfall $h_\lambda^\mathcal{A} = f_\lambda^{\lambda+1} \circ h_{\lambda+1}^\mathcal{A}$. Für jede Limeszahl λ gilt $\mathrm{Ker}\, h_\lambda^\mathcal{A} = \bigcap_{\gamma<\lambda} \mathrm{Ker}\, h_\gamma^\mathcal{A}$.

(2): Nach Satz 5.53 ist die Abbildung $h_{\kappa+\kappa}^\mathcal{A} : \mathcal{A} \to F^{\kappa+\kappa}(1)$ der eindeutige Homomorphismus in diese terminale Coalgebra, also gilt $\mathrm{Ker}\, h_{\kappa+\kappa}^\mathcal{A} = \nabla_\mathcal{A}$. Es gilt nach Konstruktion der $h_\lambda^\mathcal{A}$ sogar schon $\mathrm{Ker}\, h_\kappa^\mathcal{A} = \nabla_\mathcal{A}$, denn es gilt $f_\kappa^{\kappa+\kappa} \circ h_{\kappa+\kappa}^\mathcal{A} = h_\kappa^\mathcal{A}$, und $f_\kappa^{\kappa+\kappa}$ ist nach Hauptsatz 5.55 injektiv. □

Das bedeutet, daß man die Folge der $\mathrm{Ker}\, h_\lambda^\mathcal{A}$ als Approximationen der größten Kongruenz $\nabla_\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}$ auffassen kann. Erhält F Kerne schwach, so erhält man durch diese Folge also Approximationen für die größte Bisimulation auf $\mathcal{A}$ (Lemma 4.62).

In Satz 3.24 haben wir eine weitere Approximation der größten Bisimulation auf $\mathcal{A}$ kennengelernt, die Coerzeugungs-Sequenz $(R_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Ord}}$, definiert durch

$$R_0 := A \times A$$
$$R_{\lambda+1} := \{(a,a') \in R_\lambda \mid \exists v \in F(R_\lambda).(F\pi_1)v = \alpha_A a \wedge (F\pi_2)v = \alpha_A a'\}$$
$$R_\lambda := \bigcap_{\gamma<\lambda} R_\gamma \quad \text{für Limeszahlen } \lambda$$

Wir werden jetzt untersuchen, wie diese beiden Approximationen zusammenhängen. Dazu beachte man noch, daß $R_{\lambda+1} = \{(a,a') \in R_\lambda \mid (\alpha_A a, \alpha_A a') \in (F\pi_1, F\pi_2)[F(R_\lambda)]\}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{Ord}$ gilt.

Satz 5.58. *Es gilt* $R_\lambda \subseteq \mathrm{Ker}\, h_\lambda^\mathcal{A}$ *für jede Ordinalzahl* λ. *Wenn F Kerne schwach erhält, gilt für jedes λ Gleichheit. Insbesondere ist dann die Relation der λ-Bisimilarität auf einer F-Coalgebra eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Beweis durch Ordinalzahleninduktion über λ: Die Behauptung ist für $\lambda = 0$ und für Limeszahlen offensichtlich. Im Nachfolgerfall gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\, h_{\lambda+1}^\mathcal{A} &= \mathrm{Ker}(F(h_\lambda^\mathcal{A}) \circ \alpha_A) = \\
&= \{(a,a') \in \mathrm{Ker}\, h_\lambda^\mathcal{A} \mid (\alpha_A a, \alpha_A a') \in \mathrm{Ker}\, F(h_\lambda^\mathcal{A})\} \\
&\overset{(*)}{\supseteq} \{(a,a') \in \mathrm{Ker}\, h_\lambda^\mathcal{A} \mid (\alpha_A a, \alpha_A a') \in (F\pi_1^{\mathrm{Ker}\, h_\lambda^\mathcal{A}}, F\pi_2^{\mathrm{Ker}\, h_\lambda^\mathcal{A}})[F(\mathrm{Ker}\, h_\lambda^\mathcal{A})]\} \\
&\supseteq \{(a,a') \in \mathrm{Ker}\, h_\lambda^\mathcal{A} \mid (\alpha_A a, \alpha_A a') \in (F\pi_1^{R_\lambda}, F\pi_2^{R_\lambda})[F(R_\lambda)]\} \supseteq R_{\lambda+1}.
\end{aligned}$$

Das zeigt den ersten Teil der Behauptung. Setzt man voraus, daß F Kerne schwach erhält, kann man fast dieselbe Induktion durchführen und muß nur ausnutzen, daß in $(*)$ Gleichheit gilt. □

Der gleiche Beweis zeigt: Erhält F Kerne schwach, so gilt

$$R_{\lambda+1} = \{(a,a') \in A \times A \mid \exists v \in F(R_\lambda).(F\pi_1^{R_\lambda})v = \alpha_A a \wedge (F\pi_2^{R_\lambda})v = \alpha_A a'\}$$

(das ist die Definition, die in [**Wor99a**] verwendet wird). Wir schließen:

SATZ 5.59. *Sei F strikt κ-beschränkt für eine unendliche reguläre Kardinalzahl κ. Dann gilt für jede F-Coalgebra $\mathcal{A}$*

$$\sim_{\mathcal{A}} \subseteq R_\kappa \subseteq \nabla_{\mathcal{A}}.$$

Wenn F Kerne schwach erhält, gilt überall Gleichheit.

Also sind für Funktoren, die strikt κ-beschränkt sind und Kerne schwach erhalten, zwei Elemente einer Coalgebra, die κ-bisimilar sind, schon bisimilar. Das verallgemeinert die in Kapitel 2 erwähnte Aussage, daß zwei Zustände einer bildendlichen Kripke-Struktur, die ω-bisimilar sind, bisimilar sind.

Da sich Elemente von terminalen F-Coalgebren als unendlichstellige Formeln auffassen lassen, liegt es nahe, Elemente von $F^\lambda(1)$, also von Approximation der terminalen Coalgebra, als Formeln der Stelligkeit λ zu interpretieren (dazu benötigte man nicht einmal, daß die terminale Sequenz konvergiert):

DEFINITION 5.60. Sei γ eine Ordinalzahl. Ein Element $e \in F^\gamma(1)$ heißt *γ-stellige F-Formel*, und für ein $a \in A$ definieren wir

$$\mathcal{A}, a \Vdash e :\iff h_\gamma^{\mathcal{A}}(a) = e$$

und sagen in diesem Fall, daß *e in a gilt*. Die Menge aller F-Formeln nennen wir *F-Logik*.

Satz 5.54.(2) zeigt sofort, daß die Gültigkeit von Formeln unter Homomorphismen stabil ist, d.h., ist $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein F-Homomorphismus, $e \in F^\gamma(1)$ eine Formel, so gilt für alle Zustände $a \in A$: $a \Vdash e \iff \varphi(a) \Vdash e$.

Im letzten Abschnitt haben wir unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß F schwache Pullbacks erhält und standard ist, die Sprache $\mathcal{L}_F^\kappa$ und kanonische Abbildungen $\mathfrak{f}_\lambda^{\mathcal{A}} : A \to \mathcal{L}_F^\kappa$ für $\lambda \leq \kappa$ definiert. In [**Mos99**] wird bewiesen, daß für alle $a, b \in A$ und jede Ordinalzahl λ gilt:

$$b \models \mathfrak{f}_\lambda^{\mathcal{A}}(a) \iff (a,b) \in \operatorname{Ker} \mathfrak{f}_\lambda^{\mathcal{A}}.$$

Wir beweisen damit:

SATZ 5.61. *Wenn F schwache Pullbacks erhält und standard ist, so sind für jedes $a \in A$ und jede Ordinalzahl $\lambda \leq \kappa$ die Formeln $\mathfrak{f}_\lambda^{\mathcal{A}}(a)$ (bzgl. Larry Moss' Logik) und $h_\lambda^{\mathcal{A}}(a) \in F^\lambda(1)$ semantisch äquivent.*

BEWEIS. Da die Gültigkeit von Formeln unter Homomorphismen invariant ist und wir in $\mathbf{Set}_F$ Summen bilden können, müssen wir nur zeigen, daß die Formeln auf $\mathcal{A}$ semantisch äquivalent sind. Der Fall $\lambda = 0$ und der Limesfall sind offensichtlich. Wir setzen also voraus, daß wir die Behauptung für ein $\lambda \in \mathrm{Ord}$ bewiesen haben. Dann gilt für alle $a, b \in A$

$$b \models \mathfrak{f}_{\lambda+1}^{\mathcal{A}}(a) \iff (a,b) \in \operatorname{Ker} \mathfrak{f}_{\lambda+1}^{\mathcal{A}},$$
$$b \Vdash h_{\lambda+1}^{\mathcal{A}}(a) \iff (a,b) \in \operatorname{Ker} h_{\lambda+1}^{\mathcal{A}}.$$

Wir müssen also nur $\operatorname{Ker} h^{\mathcal{A}}_{\lambda+1} = \operatorname{Ker} \mathfrak{f}^{\mathcal{A}}_{\lambda+1}$ zeigen. Es gilt aber induktiv

$$\begin{aligned}
&(a,b) \in \operatorname{Ker} \mathfrak{f}^{\mathcal{A}}_{\lambda+1}\\
\iff &(\alpha_A a, \alpha_A b) \in \operatorname{Ker} F(\mathfrak{f}^{\mathcal{A}}_{\lambda})\\
\iff &(\alpha_A a, \alpha_A b) \in (F\pi_1, F\pi_2)[F(\operatorname{Ker} \mathfrak{f}^{\mathcal{A}}_{\lambda})]\\
\iff &(\alpha_A a, \alpha_A b) \in (F\pi_1, F\pi_2)[F(\operatorname{Ker} h^{\mathcal{A}}_{\lambda})]\\
\iff &(a,b) \in \operatorname{Ker} h^{\mathcal{A}}_{\lambda+1},
\end{aligned}$$

wobei wir bei der dritten Äquivalenz ausgenutzt haben, daß F Kerne schwach erhält. □

Damit kann man die Coalgebraische Logik aus [**Mos99**] als Spezialfall der F-Logik über terminale Sequenzen verstehen.

15. Bemerkungen und Literatur

Der Begriff des *beschränkten Funktors* ist in [**Rut00b**] definiert worden, dort für den Fall von Funktoren, die schwache Pullbacks erhalten. Im Laufe der weiteren Untersuchung dieser Bedingung zeigte sich sich dann, daß ein leicht verallgemeinerter Begriff des beschränkten Funktors, wie wir ihn in diesem Kapitel definiert haben, in verschiedenen Arbeiten der sechziger und siebziger Jahre vor allem in Prag intensiv untersucht worden ist. Zu diesen frühen Arbeiten - in denen beschränkte Funktoren meistens *klein* genannt werden - gehören [**Trn69, Trn71a, Trn71b, AKP72, Kou71, Lam68, TG69**]. In diesen Artikeln wurden etliche (Co-)Vollständigkeitsaussagen für Kategorien von Algebren und Coalgebren bewiesen.

Zwischen 1975 und 1985 wurden nur noch wenige Artikel veröffentlicht, die sich mit F-(Co)-Algebren im Sinne dieser Arbeit beschäftigten. Zu nennen sind [**AK79**] von Adámek und Koubek, ein Artikel, der sich ausführlich mit der Konstruktion von initialen F-Algebren beschäftigt, [**KR79**] von Koubek und Reiterman, wo u.a. Limites und Colimites von Algebren kategoriell konstruiert werden, und [**A**$^{+}$**75, KK74**] von Adamek et al. bzw. Kurkova und Koubek, wo die Zusammenhänge zwischen freien F-Algebren und Monaden untersucht werden. In der Monographie [**AT90**] sind etliche Ergebnisse der erwähnten Artikel zusammengefaßt, und es wird eine algebraische Theorie des Verhaltens von Automaten entwickelt.

Das Interesse an terminalen Coalgebren wurde durch das Buch [**Acz88**] und durch mögliche Anwendungen in der Informatik geweckt. 1989 war dann der Artikel [**AM89**] von Aczel und Mendler der Auftakt für eine ganze Reihe von Arbeiten, die sich mit der Existenz und der Konstruktion terminaler Coalgebren beschäftigen, so Arbeiten von Barr [**Bar93, Bar94**], Kawahara und Mori [**KM00**], Paulson [**Pau94**], Rutten und Turi [**TR98, RT94**], Worrell [**Wor99b**], Adámek und Koubek [**AK95**] sowie Rutten [**Rut00b**]. Es stellte sich erst im Lauf der Zeit heraus, daß die Beschränktheit eines Funktors die "richtige" Bedingung ist, um die Existenz von terminalen Coalgebren sicherzustellen. Covarietäten und cofreie Coalgebren wurden in [**Mar85, Rut00b, Kur98, Kur01**] untersucht.

In [**GS01a, GS01d, GS01b, GHS01**] ist u.a. ein Teil dieses Kapitels erschienen.

KAPITEL 6

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel möchte ich die wichtigsten der in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse zusammenfassen und offene Probleme sowie Möglichkeiten der Weiterarbeit darstellen.

1. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde eine Theorie der Coalgebra für **Set**-Endofunktoren entwickelt. Ziel war es vor allem, zu erkennen, in welcher Weise Eigenschaften eines **Set**-Endofunktors mit Eigenschaften der Coalgebren dieses Funktors korrespondieren.

Kapitel 3 enthält die Grundlagen der Theorie der Coalgebra eines **Set**-Endofunktors F: es wurden u.a. die Kategorie $\mathbf{Set}_F$ der F-Coalgebren und die Zentralbegriffe *κ-Simulation*, *Untercoalgebra*, *Kongruenz* und *terminale Coalgebra* eingeführt und grundlegende Aussagen darüber bewiesen.

Kapitel 4 untersucht, wie Limes-Erhaltungseigenschaften des Funktors F mit bestimmten Eigenschaften der F-Coalgebren zusammenhängen. Als Schlüsselbegriff erwies sich der Begriff der $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation: Der Funktor F erhält einen nicht-leeren Limes genau dann schwach, wenn sich dieser Limes immer zu einer $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation "liften" läßt (Hauptsatz 4.21). Weiterhin stellte sich heraus: Ist die größte $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation nicht leer, so ist sie genau dann der Limes des Diagramms $\bar{\mathfrak{D}}$ in $\mathbf{Set}_F$, wenn F den mono-source der Projektionen dieser größten $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation erhält. Dann wurde die coalgebraische Bedeutung der (schwachen) Erhaltung bestimmter Klassen von Limites genauer untersucht. Die Hauptergebnisse dieser Untersuchung sind folgende Äquivalenzen:

F erhält (nicht-leere)		In $\mathbf{Set}_F$ gilt:
Pullbacks schwach	$\Longleftrightarrow$	Die Komposition von Bisimulationen ist immer eine Bisimulation
Kerne schwach	$\Longleftrightarrow$	Jede Kongruenz ist eine Bisimulation.
	$\Longleftrightarrow$	Jeder mono ist injektiv.
Urbilder	$\Longleftrightarrow$	Urbilder von Untercoalgebren unter Homomorphismen sind Untercoalgebren
	$\Longleftrightarrow$	Jeder Homomorphismus in eine Summe induziert eine Zerlegung des Definitionsbereichs
κ-Schnitte ($\kappa \geq \omega$)	$\Longleftrightarrow$	κ-Schnitte von Untercoalgebren sind Untercoalgebren

Als trennendes Beispiel wurde für ein kommutatives Monoid $\mathcal{M}$ der $\mathcal{M}$-Mengen-Funktor $\mathcal{M}^{(-)}$ betrachtet, der sich zur Modellierung verallgemeinerter Transitionssysteme eignet.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit beschränkten Funktoren. Hauptsatz 5.10 und Satz 5.12 geben eine Reihe von äquivalenten Formulierungen dieses Begriffs. Es zeigte sich, daß sich Coalgebren von beschränkten Funktoren als Äquivalenzklassen von Moore-Automaten auffassen lassen, was z.B. zu einem neuen Beweis der Existenz von terminalen Coalgebren für beschränkte Funktoren und einer Kardinalitätsabschätzung für die terminale Coalgebra führte (Satz 5.14). Weiterhin zeigte sich, daß $\mathbf{Set}_F$ für beschränkte Funktoren F vollständig ist und daß bestimmte Produkte von $\mathcal{P}$-Coalgebren nicht existieren.

Zum Abschluß wurde untersucht, wie sich Elemente von terminalen Coalgebren approximieren lassen. Die Gegenüberstellung von Larry Moss' Coalgebraischer Logik ([**Mos99**]) und der aus der terminalen Sequenz definierbaren Logik ([**Wor99a**]) ergab, daß die Semantik beider im wesentlichen übereinstimmt (Satz 5.61).

2. Ausblick

Es bleiben eine Reihe von interessanten offenen Punkten:

- Es ist weiterhin ungeklärt (außer für spezielle Klassen von Funktoren), wie ein geeigneter "Co-Gleichungs-Kalkül" aussehen könnte (man vgl. allerdings H. Peter Gumms Arbeiten [**Gum01a, Gum00**]).
- Bislang ist in der Coalgebra fast immer die gesamte Kategorie $\mathbf{Set}_F$ untersucht worden, während in den Anwendungen der Universellen Algebra meist bestimmte Varietäten die interessanteren Objekte sind. Für $\mathbf{Set}_F$ fehlen noch interessante Anwendungen von Covarietäten und eine Verallgemeinerung der in dieser Arbeit erzielten Resultate auf Covarietäten. Auch die Frage, ob für Coalgebren eine Mal'cev-Theorie möglich ist, ist ungeklärt.
- Da man viele Typen von Coalgebren als verallgemeinerte Transitionssysteme auffassen kann, stellt sich die Frage, ob man nicht noch mehr Begriffe aus der Theorie der Transitionssysteme verallgemeinern kann - z.B. Ultrafiltererweiterungen und die Dualität zwischen Kripke-Strukturen und Booleschen Algebren mit Operatoren.

ANHANG A

Symbolverzeichnis

Dieser Abschnitt gibt einen kurzen Überblick über die wichtigsten der in dieser Arbeit verwendeten Symbole und Notationen.

1. Kategorientheorie

Set: die Kategorie der Mengen und Abbildungen.
Set*: die Kategorie der nicht-leeren Mengen und nicht-leeren Abbildungen.
Rel: die Kategorie, deren Objekte die Mengen und deren Objekte die binären Relationen sind.
$\mathcal{C}_F$**:** die Kategorie der Coalgebren zum $\mathcal{C}$-Endofunktor F.
$\mathcal{C}^F$**:** die Kategorie der Algebren zum $\mathcal{C}$-Endofunktor F.
$\nu : F \xrightarrow{\bullet} G$**:** ν ist eine natürliche Transformation zwischen den Funktoren F und G.
$\nu : F \overset{\bullet}{\twoheadrightarrow} G$**:** ν ist eine surjektive natürliche Transformation zwischen den Funktoren F und G.
$\mathrm{pb}(f,g)$**:** der Pullback der Morphismen f und g.
$\mathrm{eq}(f,g)$**:** der Equalizer der Morphismen f und g.
$\mathrm{push}(f,g)$**:** der Pushout von f mit g.
$\mathrm{Ker}\, f$**:** der Kern des Morphismus f, also der Pullback von f mit sich selbst. In **Set**: $\mathrm{Ker}\, f = \{(a,a') \mid fa = fa'\}$.
$(f_i)_{i\in I}$**:** je nach Kontext: eine Familie, indiziert mit Elementen aus I, oder - wenn es sich um Morphismen mit gleichem Definitionsbereich haben - der durch diese Familie eindeutig bestimmte Morphismus ins Produkt ihrer Wertebereiche.
$[f_i]_{i\in I}$**:** für eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von Morphismen mit gleichem Wertebereich: der durch diese Familie eindeutig bestimmte Morphismus aus der Summe ihrer Definitionsbereiche.
$\mathfrak{D}$**:** ein Diagramm in einer Kategorie
$\mathcal{I}$**:** der Identitätsfunktor
$\mathcal{P}$**:** der Potenzmengenfunktor
$\mathcal{F}$**:** der Filterfunktor
$\mathfrak{T}$**:** der Funktor, der jeder Menge die cofreie F-Coalgebra über dieser Menge zuordnet.
$\mathcal{L}^-$**:** der unendliche Multimengenfunktor zu einem vollständigen Verband $\mathcal{L}$
$\mathcal{M}^{(-)}$**:** der (endliche) $\mathcal{M}$-Mengen-Funktor zu einem kommutativen Monoid $\mathcal{M}$.
$F_{\leq\kappa}$**:** für eine Kardinalzahl κ: die κ-Beschränkung von F.
$F_{<\kappa}$**:** für eine Kardinalzahl κ: die strikte κ-Beschränkung von F.

2. Mengentheorie

$\mathbb{N}$**:** die Menge der natürlichen Zahlen.
$\mathbb{R}$**:** die Menge der reellen Zahlen.
$\mathbb{R}_+$**:** die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen.
$\subseteq^A_U$**:** für eine Teilmenge $U \subseteq A$: die kanonische Einbettungsabbildung.
$f : A \hookrightarrow B$**:** f ist eine injektive Abbildung.

$f : A \twoheadrightarrow B$**:** f ist eine surjektive Abbildung.
$\pi_R : A \twoheadrightarrow A/R$**:** die kanonische Projektion von A auf den Faktor von A nach der Äquivalenzrelation R.
$f[U]$**:** für eine Abbildung $f : A \to B$ und eine Teilmenge $U \subseteq A$: das Bild von U unter f, d.h. $f[U] = \{fu \mid u \in U\}$.
$f^{-}[V]$**:** für eine Abbildung $f : A \to B$ und eine Teilmenge $V \subseteq B$: das Bild von V unter f, d.h. $f^{-}[V] = \{a \in A \mid fa \in V\}$.
$\emptyset_A$**:** für eine Menge A: die eindeutige Abbildung aus der leeren Menge in A.
$\operatorname{Gr} f$**:** der Graph der Abbildung $f : A \to B$, also die Menge $\{(a, fa) \mid a \in A\}$.
$f_{|U}$**:** die Einschränkung des Definitionsbereichs der Abbildung f auf die Menge U.
$f^{|V}$**:** die Einschränkung des Wertebereichs der Abbildung f auf die Menge V.
Δ_A**:** die Diagonale auf einer Menge A, d.h. $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.
R^{-}**:** die umgekehrte Relation einer Relation $R \subseteq A \times B$, d.h.: $R^{-} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$.
$\mathfrak{F}(A, u)$**:** für $u \in FA$ der F-Filter von (A, u).
$\operatorname{Eq}(R)$**:** die von einer Relation erzeugte Äquivalenzrelation.

3. Coalgebra

$\operatorname{Con}(\mathcal{A})$**:** die Menge der Kongruenzen auf der Coalgebra $\mathcal{A}$.
$[R]_{\bar{\mathfrak{D}}}$**:** die von der Menge R coerzeugte $\bar{\mathfrak{D}}$-Simulation.
$[R]_2$**:** die von der Menge R coerzeugte Bisimulation.
$[U]$**:** die von der Menge U coerzeugte Untercoalgebra.
$\nabla_{\mathcal{A}}$**:** die größte Kongruenz auf der Coalgebra $\mathcal{A}$.
$\mathcal{U} \leq \mathcal{A}$**:** $\mathcal{U}$ ist Untercoalgebra von $\mathcal{A}$.
$!_{\mathcal{A}}$**:** der eindeutige Homomorphismus von der Coalgebra $\mathcal{A}$ in die terminale Coalgebra.
α_A^v**:** für ein $v \in FA$: die konstante Coalgebrenstruktur auf A mit Wert v.
$\bar{\mathfrak{D}}$**:** ein Lifting des Diagramms $\mathfrak{D}$ von **Set** auf $\mathbf{Set}_F$.
$\bar{\mathfrak{D}}^{(v_i)}$**:** für ein Diagramm $\mathfrak{D}$ in **Set** und eine kompatible Auswahl $(v_i \in FA_i)_{A_i \in \mathbf{Set}}$: das durch die konstanten Coalgebrenstrukturen mit Wert v_i definierte Lifting des Diagramms $\mathfrak{D}$ von **Set** in $\mathbf{Set}_F$.
$\mathcal{H}(\mathcal{K})$**:** die Klasse der homomorphen Bilder von Coalgebren aus $\mathcal{K}$.
$\mathcal{H}^{-}(\mathcal{K})$**:** die Klasse der homomorphen Urbilder von Coalgebren aus $\mathcal{K}$.
$\mathcal{S}(\mathcal{K})$**:** die Klasse der Untercoalgebren von Coalgebren aus $\mathcal{K}$.
$\Sigma(\mathcal{K})$**:** die Klasse der Summen von Coalgebren aus $\mathcal{K}$.
$\mathcal{B}(\mathcal{K})$**:** die Klasse der Coalgebren, die total bisimilar zu einer Coalgebra aus $\mathcal{K}$ sind.
$\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathcal{U})$**:** die Klasse der Coalgebren, für die jeder Homomorphismus nach $\mathcal{A}$ durch die Untercoalgebra $\mathcal{U}$ von $\mathcal{A}$ faktorisiert.

Literaturverzeichnis

[A+75] J. Adámek et al., *Free algebras, input processes and free monads*, Comm. Math. Univ. Carolinae (1975), no. 16,2, 339–351.

[Acz88] P. Aczel, *Non-well-founded sets*, CSLI Lecture Notes Number 14, CSLI Publications, Stanford, 1988.

[AHS90] J. Adámek, H. Herrlich, and G.E. Strecker, *Abstract and concrete categories*, John Wiley & Sons, New York, 1990.

[AK79] J. Adámek and V. Koubek, *Least fixed point of a functor*, Journal of Computer and System Sciences **19** (1979), no. 2, 163–178.

[AK95] J. Adámek and V. Koubek, *On the greatest fixed point of a set endofunctor*, Theoretical Computer Science (1995), no. 150, 57–75.

[AKP72] J. Adámek, V. Koubek, and V. Pohlova, *The colimits in the generalized algebraic categories*, Acta Universitatis Carolinae Mathematica et Physica **13** (1972), no. 2, 29–40.

[AKT01] J. Adámek, V. Koubek, and V. Trnková, *How large are left exact functors?*, Preprint, 2001.

[AM74] M.A. Arbib and E.G. Manes, *Machines in a category*, SIAM Review (1974), no. 16, 163–192.

[AM89] P. Aczel and N. Mendler, *A final coalgebra theorem*, Proceedings category theory and computer science (D.H. Pitt et al., eds.), Lecture Notes in Computer Science, Springer, 1989, pp. 357–365.

[AP01] J. Adámek and H. Porst, *From varieties of algebras to covarieties of coalgebras*, Coalgebraic Methods in Computer Science (CMCS'01) (A. Corradini, M. Lenisa, and U. Montanari, eds.), Electronic Notes in Theoretical Computer Science, no. 44.1, Elsevier, 2001, pp. 27–46.

[AR94] J. Adámek and J. Rosický, *Locally presentable and accessible categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, no. 189, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[AT90] J. Adámek and V. Trnková, *Automata and algebras in categories*, Kluwer Academic Publishers, 1990.

[B+00] Blackburn et al., *Modal logic*, unveröffentlicht, 2000.

[Bar92] M. Barr, *Algebraically compact functors*, Journal for Pure and Applied Algebra **82** (1992), 211–231.

[Bar93] M. Barr, *Terminal coalgebras in well-founded set theory*, Theoretical Computer Science (1993), no. 114(2), 299–315.

[Bar94] M. Barr, *Additions and corrections to 'Terminal coalgebras in well-founded set theory'*, Theoretical Computer Science (1994), no. 124(1), 189–192.

[BM96] J. Barwise and L. Moss, *Vicious circles*, CSLI Lecture Notes, 1996.

[Bor94a] Francis Borceux, *Handbook of categorical algebra 1. basic category theory*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Bor94b] Francis Borceux, *Handbook of categorical algebra 2. categories and structures*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Bor94c] Francis Borceux, *Handbook of categorical algebra 3. categories of sheaves*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[CK73] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model theory*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[CKW90] A. Carboni, G.M. Kelly, and R.J. Wood, *A 2-categorical approach to change of base and geometric morphisms I*, Tech. report, Department of Pure Mathematics, University of Sydney, 1990, ISSN 1033-2359.

[CLW93] A. Carboni, S. Lack, and R.F.C. Walters, *Introduction to extensive and distributive categories*, Journal of Pure and Applied Algebra (1993), no. 84, 145–158.

[Coc93] J. R. B. Cockett, *Introduction to distributive categories*, Mathematical Structures in Computer Science **3** (1993), no. 3, 277–307.

[dVR99] E.P. de Vink and J.J.M.M. Rutten, *Bisimulation for probabilistic transition systems: a coalgebraic approach*, Theoretical Computer Science (1999), no. 211, 271–293.

[E+72] H. Ehrig et al., *Kategorien und Automaten*, deGruyter, 1972.

[Eil74] S. Eilenberg, *Automata, languages, and machines*, vol. A, Academic Press, 1974.

[ftp] ftp://tac.mta.ca/pub/categories/, *Mailingliste Kategorientheorie*.

[GHS01] H.P. Gumm, J. Hughes, and T. Schröder, *Distributivity of categories of coalgebras*, Tech. Report 28, FB Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg, 2001.

[Gog67] J.A. Goguen, *L-fuzzy sets*, Journal of Mathematical Analysis and Applications (1967), no. 18, 145–174.

[Grä98] G. Grätzer, *General lattice theory*, 2. ed., Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin, 1998.

[GS00] H.P. Gumm and T. Schröder, *Coalgebraic structure from weak limit preserving functors*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science (2000), no. 33, 113–133.

[GS01a] H.P. Gumm and T. Schröder, *Coalgebras of bounded type*, erscheint in Mathematical Structures in Computer Science, 2001.

[GS01b] H.P. Gumm and T. Schröder, *Covarieties and complete covarieties*, Theoretical Computer Science (2001), no. 260 (1-2), 71–86.

[GS01c] H.P. Gumm and T. Schröder, *Monoid-labeled transition systems*, Coalgebraic Methods in Computer Science (CMCS'01) (A. Corradini, M. Lenisa, and U. Montanari, eds.), Electronic Notes in Theoretical Computer Science, no. 44.1, Elsevier, 2001, pp. 184–203.

[GS01d] H.P. Gumm and T. Schröder, *Products of coalgebras*, Algebra Universalis (2001), no. 46, 163–185.

[Gum] H.P. Gumm, persönliche Kommunikation.

[Gum99] H.P. Gumm, *Elements of the general theory of coalgebras*, LUATCS 99, Rand Afrikaans University, Johannesburg, South Africa, 1999.

[Gum00] H.P. Gumm, *Birkhoff's variety theorem for coalgebras*, erscheint in Contributions to General Algebra, 2000.

[Gum01a] H.P. Gumm, *Equational and implicational classes of coalgebras*, Theoretical Computer Science (2001), no. 260 (1-2), 57–69.

[Gum01b] H.P. Gumm, *Functors for coalgebras*, Algebra Universalis (2001), no. 45 (2-3), 135–147.

[HS73] H. Herrlich and G.E. Strecker, *Category theory*, Allyn and Bacon Inc, Boston, 1973.

[HU94] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman, *Einführung in die Automatentheorie, formale Sprachen und Komplexitätstheorie*, dritte ed., Addison-Wesley, 1994.

[Ihr93] Th. Ihringer, *Allgemeine Algebra*, zweite ed., Teubner, 1993.

[Jac96] B. Jacobs, *Objects and classes, co-algebraically*, Object-Orientation with Parallelism and Persistence (B. Freitag et al., eds.), Kluwer Academic Publishers, 1996.

[JPT+01] P.T. Johnstone, A.J. Power, T. Tsuijishita, H. Watanabe, and J. Worrell, *The structure of categories of coalgebras*, Theoretical Computer Science (2001), no. 260 (1-2), 87–117.

[JR97] B. Jacobs and J.J.M.M. Rutten, *A tutorial on (co)algebras and (co)induction*, Bulletin of EATCS (1997), no. 67, 222–259.

[KK74] V. Kurkova and V. Koubek, *When a generalized algebraic category is monadic*, Comm. Math. Univ. Carolinae (1974), no. 15,4, 577–586.

[KM00] Yasuo Kawahara and Masao Mori, *A small final coalgebra theorem*, Theoretical Computer Science **233** (2000), no. 1–2, 129–145.

[Kou71] V. Koubek, *Set functors*, Comm. Math. Univ. Carolinae (1971), no. 12,1, 175–195.

[Kou73] V. Koubek, *Set functors II*, Comm. Math. Univ. Carolinae (1973), no. 14,1, 47–59.

[KR73] V. Koubek and J. Reiterman, *Set functors III*, Comm. Math. Univ. Carolinae (1973), no. 14,3, 441–455.

[KR79] V. Koubek and J. Reiterman, *Categorical construction of free algebras, colimits, and comoletions of partial algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra (1979), no. 14, 195–231.

[Kur98] A. Kurz, *A co-variety-theorem for modal logic*, Proceedings of Advances in Modal Logic 2, Uppsala, Center for the Study of Language and Information, Stanford University, 1998.

[Kur99] A. Kurz, *Limits in categories of coalgebras*, Draft, 1999.

[Kur00] A. Kurz, *Logics for coalgebras and applications to computer science*, Ph.D. thesis, LMU München, 2000.

[Kur01] A. Kurz, *Modal rules are co-implications*, Coalgebraic Methods in Computer Science (CMCS'01) (A. Corradini, M. Lenisa, and U. Montanari, eds.), Electronic Notes in Theoretical Computer Science, no. 44.1, Elsevier, 2001, pp. 240–252.

[Lam68] J. Lambek, *A fixpoint theorem for complete categories*, Mathematische Zeitschrift (1968), no. 103, 151–161.

[Lan71] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.

[Len99] Marina Lenisa, *From set-theoretic coinduction to coalgebraic coinduction: some results, some problems*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science (B. Jacobs and J. Rutten, eds.), vol. 19, Elsevier Science Publishers, 1999.

[Man98] E. Manes, *Implementing collection classes with monads*, Math. Structures in Computer Science **8** (1998), 231–276.

[Mar85] M. Marvan, *On covarieties of coalgebras*, Archivum Mathematicum (Brno) **21** (1985), no. 1, 51–64.

[MD97] Lawrence S. Moss and Norman Danner, *On the foundations of corecursion*, Logic Journal of the IGPL **5** (1997), no. 2, 231–257.

[Mos99] Lawrence S. Moss, *Coalgebraic logic*, Annals of Pure and Applied Logic **96** (1999), 277–317.

[Pau94] L.C. Paulson, *A concrete final coalgebra theorem for ZF set theory*, Types for Proofs and Programms '94 (P. Dybjer et al., eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 995, Springer, 1994, pp. 120–139.

[PW98] J. Power and H. Watanabe, *An axiomatics for categories of coalgebras*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science (1998), no. 11, 161–178.

[PW00] J. Power and H. Watanabe, *Distributivity for a monad and a comonad*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science (B. Jacobs and J. Rutten, eds.), vol. 19, Elsevier Science Publishers, 2000.

[Röß00] M. Rößiger, *Coalgebras and modal logic*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science (Horst Reichel, ed.), vol. 33, Elsevier Science Publishers, 2000, pp. 299–320.

[RT94] J. Rutten and D. Turi, *Initial algebra and final coalgebra semantics for concurrency*, Proc. of the REX workshop A Decade of Concurrency – Reflections and Perspectives (J. de Bakker et al., eds.), LNCS, vol. 803, Springer-Verlag, 1994, pp. 530–582.

[Rut95] J.J.M.M. Rutten, *A calculus of transition systems (towards universal coalgebra)*, Tech. report, Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1995.

[Rut98a] J.J.M.M. Rutten, *Automata and coinduction (an exercise in coalgebra)*, Proceedings of CONCUR '98 (D. Sangiorigi and R. de Simone, eds.), LNCS, no. 1466, 1998, pp. 194–218.

[Rut98b] J.J.M.M. Rutten, *Relators and metric bisimulations*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science (1998), no. 11, 257–263.

[Rut00a] J.J.M.M. Rutten, *Behavioural differential equations: a coinductive calculus of streams, automata, and power series*, Tech. report, Centrum voor Wiskunde en Informatica, 2000.

[Rut00b] J.J.M.M. Rutten, *Universal coalgebra: a theory of systems*, Theoretical Computer Science (2000), no. 249, 3–80.

[Sch] A. Schulz, persönliche Kommunikation.

[Sch97] T. Schröder, *Modelltheorie für Coalgebren*, Diplomarbeit, Universität Marburg, 1997.

[TG69] V. Trnková and P. Goralčík, *On products in generalized algebraic categories*, Comm. Math. Univ. Carolinae (1969), no. 10,1, 49–89.

[Thi96] A. Thijs, *Simulation and fixpoint semantics*, Ph.D. thesis, University of Groningen, 1996.

[TP97] D. Turi and G.D. Plotkin, *Towards a mathematical operational semantics*, Proc. 12$^{\text{th}}$ LICS Conf., IEEE, Computer Society Press, 1997, pp. 280–291.

[TR98] Daniele Turi and Jan Rutten, *On the foundations of final coalgebra semantics: non-well-founded sets, partial orders, metric spaces*, Mathematical Structures in Computer Science **8** (1998), no. 5, 481–540.

[Trn69] V. Trnková, *Some properties of set functors*, Comm. Math. Univ. Carolinae (1969), no. 10,2, 323–352.

[Trn71a] V. Trnková, *On descriptive classification of set functors I*, Comm. Math. Univ. Carolinae (1971), no. 12,1, 143–174.

[Trn71b] V. Trnková, *On descriptive classification of set functors II*, Comm. Math. Univ. Carolinae (1971), no. 12,2, 345–357.

[Trn77] V. Trnková, *Relational automata in a category and their languages*, Lect. Notes in Computer Science 56, Springer, 1977, pp. 340–355.

[Tur96] Daniele Turi, *Functorial operational semantics and its denotational dual*, Ph.D. thesis, Free University, Amsterdam, June 1996.

[Wor98] J. Worrell, *Toposes of coalgebras and hidden algebras*, 1998, pp. 215–233.

[Wor99a] J. Worrell, *Supplement zum CMCS'99-artikel*, unveröffentlicht, 1999.

[Wor99b] J. Worrell, *Terminal sequences for accessible endofunctors*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science (B. Jacobs and J. Rutten, eds.), vol. 19, Elsevier Science Publishers, 1999.

[Wor00] J. Worrell, *On coalgebras and final semantics*, Ph.D. thesis, Oxford, 2000.

[Zim91] Hans J. Zimmermann, *Fuzzy set theory and its applications*, 2nd revised ed., Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.

Index

ANHANG B

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich mich bedanken bei Prof. Dr. H. Peter Gumm für die kontinuierliche Unterstützung und für viele anregende Diskussionen, ohne die diese Arbeit nie entstanden wäre. Bei Prof. Dr. Jiří Adámek für interessante Gespräche und Literaturhinweise sowie die bereitwillige Übernahme des Zweitgutachtens. Bei Alexander Kurz, James Worrell, Jesse Hughes und Alexander Schulz für Diskussionen über Coalgebren. Bei meiner Frau Kerstin für die Geduld, die sie mit mir hatte, wenn ich beim Abendessen eine Idee hatte und sie "nur noch kurz aufschreiben" wollte.

ANHANG C

Erklärung

Ich versichere hiermit, daß ich meine Dissertation

Coalgebren und Funktoren

selbständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt und mich dabei keiner anderen als der von mir ausdrücklich bezeichneten Quellen und Hilfen bedient habe.

Die Dissertation wurde in der jetzigen oder einer ähnlichen Form noch bei keiner anderen Hochschule eingereicht und hat noch keinen sonstigen Prüfungszwecken gedient.

Marburg, 11. April 2001

(Ort, Datum) (Unterschrift)